Propiedades Topológicas de las Esferas

Recordemos:

$$H_q(D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases} \qquad H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Implicaciones inmediatas:

- Si $m \neq n$, entonces $S^m \not\approx S^n$.
- Si $m \neq n$, entonces $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$.

Dem: Si $f: \mathbb{R}^m \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$, entonces

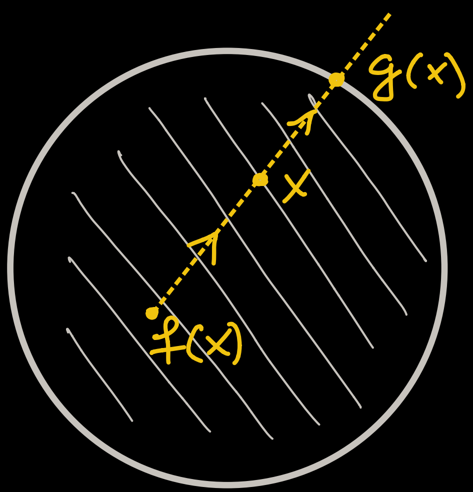
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \arrow[r, "f|", "\approx"'] & \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\} \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & \\ S^{m-1} \arrow[ur, phantom, "\simeq"] & & & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

$\therefore m = n$.

- Si $m \neq n$, entonces $D^m \not\approx D^n$. (Ejercicio)

Tma (del punto fijo de Brower)
Todo mapeo $f: D^n \to D^n$ tiene un pto. fijo
i.e. $\exists\, x_0 \in D^n$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Dem: Sup. $f(x) \neq x \quad \forall x \in D^n$ y consideremos el rayo que parte de x en la dirección de $f(x)$.



Sea $g(x)$ la intersección de este rayo con S^{n-1}.

¿Fórmula para $g(x)$?

Entonces $g: D^n \longrightarrow S^{n-1}$ es continua y tal que:

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "g"] & S^{n-1} \\ S^{n-1} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "id"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "="] & \end{tikzcd} \implies \begin{tikzcd} H_{n-1}(D^n) \arrow[r, "g_*"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, "id"'] \arrow[u, phantom, shift left=8ex, "="] & \end{tikzcd}$$

Pero $H_{n-1}(D^n) = 0$ y $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$. $\#_c$ ▨

Tma: S^{n-1} no es un retracto de D^n.

Ejercicio: ¿Cómo cambia la demostración en el caso $n=1$?

Prop: Sea $r: S^n \to S^n$ la reflexión $r(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. Entonces

$$r_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$$

es multiplicación por -1. $n \geq 1$, $\deg(r) = -1$.

Def: Gpo. ortogonal

$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n \}$$

① $A \in O(n) \iff \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$

$\iff \| Av \| = \| v \|$

$\iff$ Columnas de A forman una base o.n. de $\mathbb{R}^n$

$\iff$ Filas de A forman una base o.n. para $\mathbb{R}^n$.

② $A \in O(n) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

- si $\det(A) = 1$, A es una rotación.
- si $\det(A) = -1$, A es una reflexión.

Def: Gpo. ortogonal especial

$$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det(A) = 1 \}$$

$$= \text{gpo. de rotaciones en } \mathbb{R}^n.$$

Obs: Toda matriz $A \in O(n)$ ó $SO(n)$ se restringe a una función continua $S^{n-1} \to S^{n-1}$.

Prop: Toda rotación de S^n es $\simeq$ a la identidad.

Dem: Si $A \in SO(n+1)$ $\exists$ matriz ortogonal B tal que

$$B^{-1} A B = \begin{bmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_k \end{bmatrix} \qquad n+1 \text{ par}$$

matrices de bloques

$$B^{-1} A B = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_k & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad n+1 \text{ impar}$$

$$\text{donde } R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Remplazando θ_i por $t\theta_i$, con $t \in [0,1]$ obtenemos una homotopía H_t entre $H_0 = id$ y $H_1 = B^{-1} A B$.
La homotopía deseada es: $B \cdot H_t \cdot B^{-1}$. $\blacksquare$

Prop: Sea $g: S^n \to S^n$ la restricción de una transf. ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $g_*: H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ es mult. por $\det(g) = \pm 1$.

Dem:

- Si $\det(g) = 1$, g es una rotación de S^n y $g \simeq id$.

  $\therefore$ g_* es mult. por 1.

- Si $\det(g) = -1$, g es una reflexión

  $\Rightarrow g \circ r$ es una rotación

  $\Rightarrow g \circ r \simeq id$

  $\therefore$ $id = (g \circ r)_* = g_* \circ r_*$.

  Por lo tanto, g_* es mult. por -1.

$\blacksquare$

Cor: Sea $a: S^n \to S^n$ el mapeo antipodal $a(x) = -x$. Entonces $a_*: H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ es mult. por $(-1)^{n+1}$.

$\deg(a) = (-1)^{n+1}$.

Dem: $\det(a) = \det(-I_{n+1}) = (-1)^{n+1}$. $\blacksquare$