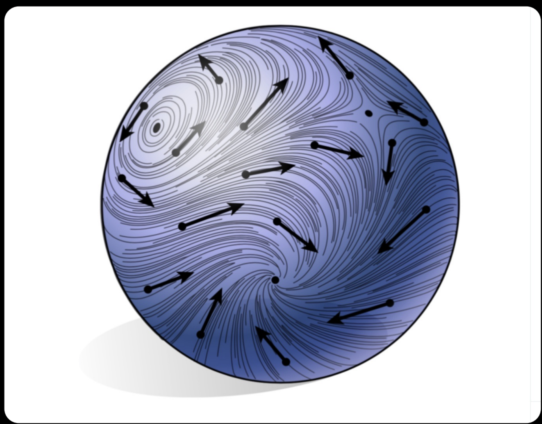
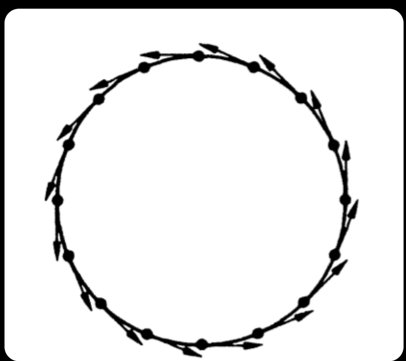
Campos Vectoriales en Esferas

Def: Un campo vectorial en S^n es una función continua $V: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $x \perp V(x)$ $\forall x \in S^n$.

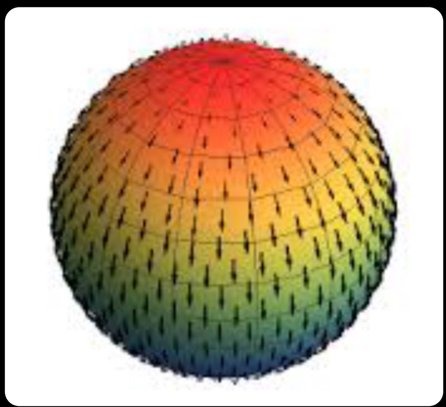


$V(x)$ suele pensarse como un vector tangente a S^n en x.

Pregunta: ¿Existirá un campo vectorial V en S^n tal que $V(x) \neq \vec{0}$ $\forall x \in S^n$?



Campo vectorial en S^1 $\neq \vec{0}$ en todo punto.



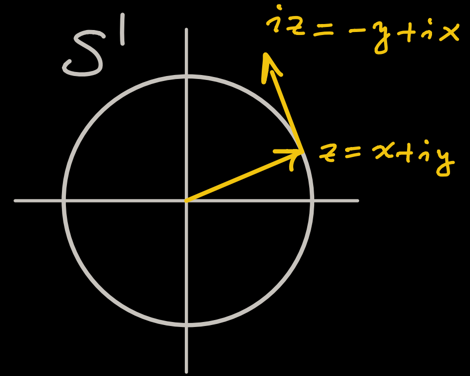
Todo campo vect. en S^2 se anula en algún pto.

Tma: S^n admite un campo vectorial $\neq \vec{0}$ en todo punto $\iff$ n es impar.

Dem: Si $n = 2m+1$, definimos $\qquad S^{2m+1} \subseteq \mathbb{R}^{2m+2}$

$$V(x_1, \dots, x_{2m+2}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2m+2}, x_{2m+1})$$

Idea: $\quad n = 1$



$V : S^1 \to \mathbb{C}$

$V(z) = iz$.

$$S^{2m+1} = \{ (z_1, \dots, z_{m+1}) \in \mathbb{C}^{m+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{m+1}|^2 = 1 \}$$

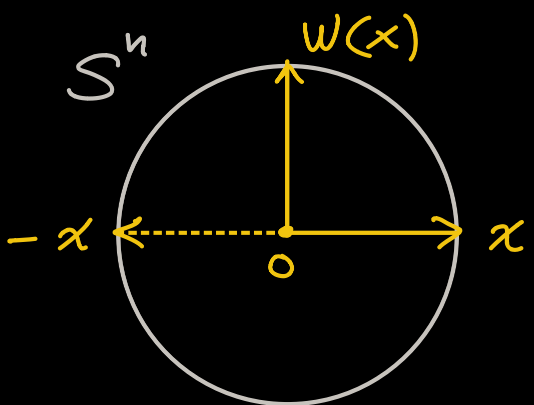
$$\begin{aligned} \vec{z} &= (z_1, \dots, z_{m+1}) \\ &= (x_1 + i x_2, \dots, x_{2m+1} + i x_{2m+2}) \end{aligned}$$

$$V(\vec{z}) = (i z_1, \dots, i z_{m+1}).$$

Recíprocamente: Si $V : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $V(x) \neq \vec{0} \quad \forall x \in S^n$,

definimos $\qquad W(x) = \dfrac{V(x)}{\|V(x)\|}$

Entonces $W : S^n \longrightarrow S^n$ y $x \perp W(x) \quad \forall x \in S^n$.



Podemos deformar $W(x)$ en x ó en $-x$.

$\therefore$ n es impar.

De manera más precisa:

$$F(x,t) = (\cos \pi t)\, x + (\operatorname{sen} \pi t)\, W(x)$$

es una homotopía tal que:
- $F(x,0) = x$
- $F(x,\frac{1}{2}) = W(x)$
- $F(x,1) = -x$

$$\therefore \; id_{S^n} \simeq W \simeq a$$

$$\Longrightarrow \deg(id_{S^n}) = \deg(a)$$

i.e. $\quad 1 = (-1)^{n+1} \quad \therefore$ n es impar. $\blacksquare$

Obs:

1. Si n es impar, hemos probado que todo campo vectorial unitario W en S^n, visto como mapeo $W: S^n \to S^n$, es homotópico a id_{S^n}.

2. Si n es par, todo campo vectorial (tangente) $V: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, se anula en algún pto. de S^n.

3. El mapeo $V: S^{2m+1} \to S^{2m+1}$, $V(\vec{z}) = i\vec{z}$, no tiene ptos. fijos ni manda algún pto. en su antipodal.

Ejem: Vamos a construir 3 campos vectoriales en S^3, linealmente ind. en todo punto.

$$S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \quad \text{(anillo de los cuaternios)}$$

Sea $\quad q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \quad \in S^3$

multiplicando por i, j y k:

$$qi = -x_1 + x_0 i + x_3 j - x_2 k$$

$$qj = -x_2 - x_3 i + x_0 j + x_1 k$$

$$qk = -x_3 + x_2 i - x_1 j + x_0 k$$

Los vectores q, qi, qj, qk son ortogonales entre sí y forman una base para $\mathbb{R}^4$. Por lo tanto:

$$u, v, w : S^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$u(q) = qi, \quad v(q) = qj, \quad w(q) = qk$$

son 3 campos tangentes en S^3, lin. ind.

Pregunta: ¿Cuántos campos tangentes lin. indep. podemos construir en S^n si n es impar?

Tma (Adams) Campos Vectoriales en S^n

Para n impar, escribimos a $n+1$ en la forma:

$$n+1 = (\text{impar})\, 2^{4a+b}, \quad \text{con } 0 \leq b \leq 3 .$$

Entonces S^n admite exactamente 2^b+8a-1 campos tangentes $\neq \vec{0}$, lin. independientes.

$$2^b+8a-1 = \text{Núm. de Hurwitz-Radon.}$$

Depende solo de la potencia de 2 que divide a $n+1$.

Ejems:

- $n=3$, $n+1 = 4 = 2^2 = 2^{4\cdot 0+2}$

  $\therefore 2^b+8a-1 = 3$.

  S^3 admite 3 campos tangentes l.i.

- $n=7$, $n+1 = 8 = 2^3 = 2^{4\cdot 0+3}$

  $\therefore 2^b+8a-1 = 7$.

  S^7 admite 7 campos tangentes l.i.

- $n=15$, $n+1 = 16 = 2^4 = 2^{4\cdot 1+0}$

  $\therefore 2^b+8a-1 = 8$.

  S^{15} admite 8 campos tangentes l.i.