1.7. Gpos. Topológicos, Acciones de Gpos. y Espacios de Orbitas.

Def: Un espacio top. G es un grupo topológico si G es un grupo y las funciones

$$\begin{array}{ccc} G \times G \longrightarrow G & \qquad & G \longrightarrow G \\ (x,y) \longmapsto xy & \qquad & x \longmapsto x^{-1} \end{array}$$

son contínuas.

- Dos grupos topológicos G y H son isomorfos si $\exists\ f: G \to H$ que es iso. de gpos. y homeo.

Ejems:

1. Todo gpo. G es un gpo. top. c/ top. discreta.

2. G, H gpos. top. $\Longrightarrow$ $G \times H$ gpo. top.

3. $\mathbb{R}^n$ es un gpo. top. c/ suma de vectores.

4. S^1 es un gpo. top. c/ producto núms. complejos.

5. S^3 es gpo. top. c/ producto de cuaternios.

Anillo de los cuaternios: $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, base canónica $1, i, j, k$.

Producto: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dr] & \\ k \arrow[ur] & & j \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

$q = a + bi + cj + dk$

$\bar{q} = a - bi - cj - dk$

$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

$|q_1 \cdot q_2| = |q_1||q_2|$

$q \cdot \bar{q} = |q|^2$

$q \neq 0 \quad q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}$

$S^3 = \{ q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1 \}$ cerrada bajo producto de cuaternios.

$\cap\!\!\!|$

$\mathbb{R}^4$

Ejems: Los sigs. son grupos topológicos

- El gpo. general lineal (de matrices $n \times n$)

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0 \}$$

$$GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2} \text{ abierto}$$

- El gpo. ortogonal

$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n \}$$

cerrado bajo mult. e inversos.

A es ortogonal si: $\bullet\ A\cdot A^t = I$

$\iff \bullet\ \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\iff \bullet\ \|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\iff \bullet$ A tiene filas o.n.

$\iff \bullet$ A tiene columnas o.n.

$$A\cdot A^t = I \implies \det(A\cdot A^t) = 1$$
$$\implies \det(A)^2 = 1$$
$$\implies \det(A) = \pm 1$$

• El gpo. ortogonal especial

$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ (rotaciones en $\mathbb{R}^n$)

$$O(n) = SO(n)^+ \cup SO(n)^-$$

rotaciones
$\det = +1$

reflexiones
$\det = -1$

$\det : O(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$\therefore$ $O(n)$ no es conexo.

$SO(n)$ es arco-conexo

$O(n)$ tiene dos comp. arco-conexas.

- $GL(n,\mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0 \}$

  $GL(n,\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^{n^2}$ abierto

- $U(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \bar{A}^t = I \}$ gpo. unitario

$A \cdot \bar{A}^t = I \Rightarrow \det(A) \cdot \overline{\det(A)} = 1$

$\Rightarrow |\det(A)| = 1$ núm. complejo unitario

- $SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det(A) = 1 \}$ gpo. unitario especial

$U(n)$ y $SU(n)$ son arco-conexos.

Todos estos gpos. de matrices son variedades.

- $\dim O(n) = \dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\dim U(n) = n^2$
- $\dim SU(n) = n^2 - 1$

Ejems:
- $SO(2) \cong U(1) \cong S^1$ $\quad \dim = 1$
- $SU(2) \cong S^3$ $\quad \dim = 3$
- $SO(3) \approx \mathbb{RP}^3$ Ejercicio 6.1.A6

Def: sea G gpo. topológico y X espacio topológico.
G actúa en X si $\exists$ una función continua

$$\mu : G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g \cdot x \qquad \text{tal que:}$$

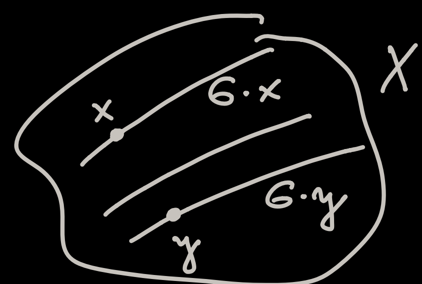
- $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x \qquad \forall g, h \in G, \; x \in X$
- $1 \cdot x = x \qquad \forall x \in X$

elto. identidad

Notación: $G \circlearrowright X$

- Para $x \in X$ definimos la órbita de x:

$$G \cdot x = \{ g \cdot x \mid g \in G \} \subseteq X$$



- Dos órbitas $G \cdot x$ & $G \cdot y$ son iguales ó son disjuntas.

Dem: $G \cdot x \cap G \cdot y \neq \emptyset \Rightarrow \exists \; g \cdot x = h \cdot y$
$\Rightarrow x = g^{-1} h \cdot y$
$\Rightarrow x \in G \cdot y$

i.e. $G \cdot x \subseteq G \cdot y$. Similarmente $G \cdot y \subseteq G \cdot x$

$\therefore \quad G \cdot x = G \cdot y$.

- El conjunto de órbitas forma una partición de X.

- Si $G \curvearrowright X$, definimos una R.E. en X:

$$x \sim y \iff G \cdot x = G \cdot y$$
$$\iff x = g \cdot y \text{ para algún } g \in G.$$

y clases de equivalencia = órbitas.

Def: El espacio cociente $X/\sim$ se denota X/G y se conoce como el espacio de órbitas.

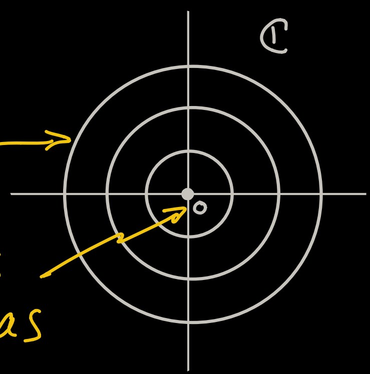
- Proy. canónica: $p: X \longrightarrow X/G$ es continua
$$x \longmapsto \langle x \rangle = G \cdot x$$

- Para $g \in G$ fijo, $X \xrightarrow{\approx} X$ homeomorfismo
$$x \longmapsto g \cdot x$$
¿Inversa?

- Si G es discreto, la continuidad de μ es equivalente a que las funciones $X \longrightarrow X$, $x \longmapsto g \cdot x$ sean continuas $\forall g \in G$.

Ejems:

a) $S^1 \circlearrowright \mathbb{C}$, $\quad \mu: S^1 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$$(\lambda, z) \longmapsto \lambda z$$



dos tipos de órbitas

$[0, +\infty)$

espacio cociente

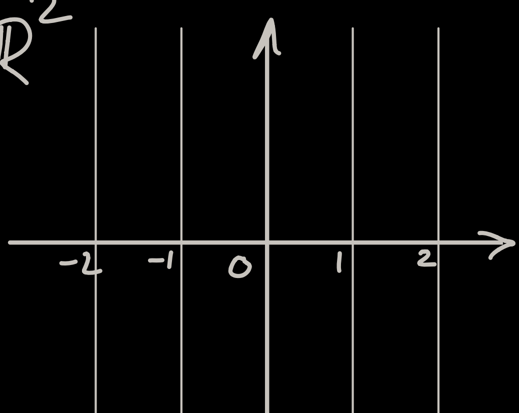
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & {[0,+\infty)} \\
\mathbb{C}/S^1 \arrow[ur, dashed, "\bar{f}", "\approx"']
\end{tikzcd}$$

$f(z) = |z|$

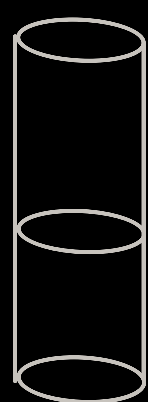
Inversa:
$$[0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}/S^1$$
$$r \longmapsto \langle r \rangle$$

b). $\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}^2$ $\quad \mu: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$(n, (x,y)) \longmapsto (x+n, y)$$

$\mathbb{R}^2$



$\xrightarrow{p}$



$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \approx S^1 \times \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \times \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}", "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

$$f(x,y) = (e^{2\pi i x}, y)$$

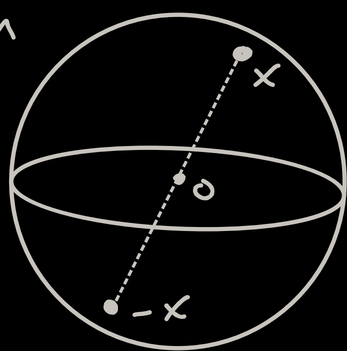
periódica de periodo entero.

c). $S^0 = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2 \circlearrowright S^n$

esfera de dim. 0

$$S^0 \times S^n \longrightarrow S^n$$
$$(\varepsilon, x) \longmapsto \varepsilon x$$

S^n



$$S^n/S^0 \approx \mathbb{RP}^n$$

espacio proy. real

d). $S^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$

$S^1 \circlearrowright S^{2n+1}$,

$$S^1 \times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$$
$$(\lambda, \vec{z}) \longmapsto \lambda \vec{z}$$

$S^{2n+1}/S^1 \approx \mathbb{CP}^n$ espacio proy. complejo.

Def: Una acción de G en X es libre si $\forall x \in X, g \in G$

$$g \cdot x = x \implies g = 1$$

Equiv. $\forall g \neq 1$, la función $\begin{array}{l} X \longrightarrow X \\ x \longmapsto g \cdot x \end{array}$ no tiene ptos. fijos

Tma: Si G es un gpo. finito y discreto, que actúa libremente en una n-variedad cerrada M, entonces M/G es una n-variedad cerrada.

Dem. Ejercicio. 1er Examen

Ejem: $S^{2k-1} = \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid |z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1\}$ $(k \geq 2)$

Sean $p \geq 2$ y $1 \leq q_1, \dots, q_k < p$, enteros, $(q_i, p) = 1$.

$C_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$ = gpo. raíces p-ésimas de 1 generado por $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$

C_p actúa en S^{2k-1}:

$$\mu : C_p \times S^{2k-1} \longrightarrow S^{2k-1}$$
$$(z, (z_1, \dots, z_k)) \longmapsto (z^{q_1} z_1, \dots, z^{q_k} z_k)$$

$L_{2k-1}(p; q_1, \dots, q_k) := S^{2k-1}/C_p$ espacio lente de dim. $2k-1$ y de tipo $(p; q_1, \dots, q_k)$.

Tma. $\implies$ Var. cerrada dim. $2k-1$.

1.8 Topología Débil

Def: Sea $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ sucesión creciente de espacios topológicos tales que:

- X_n es cerrado en X_{n+1}.
- X_n tiene la top. de subespacio de X_{n+1}.

Definimos: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ con la topología débil:

$A \subseteq X$ es cerrado $\iff$ $A \cap X_n$ es cerrado en X_n, $\forall n$.

Entonces:

- $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ es un esp. top $\left(\varinjlim_n X_n \right)$
- X_n es cerrado en X.

Ejem: $\mathbb{R}^0 \subseteq \mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \dots$, $\mathbb{R}^\infty := \varinjlim_n \mathbb{R}^n$

Ptos. de $\mathbb{R}^\infty$ son sucesiones $(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$.

Pregunta: $\mathbb{R}^\infty \overset{?}{\approx} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$

c/topología débil

c/ topología inducida por la métrica

$$\|x-y\| = \sqrt{\sum_n (x_n - y_n)^2}$$

Ejercicio: $\mathbb{R}^\infty$ no es metrizable (Ejem. 1.8.6).

$\therefore \mathbb{R}^\infty \not\cong \bigcup_n \mathbb{R}^n$ c/métrica euclidiana

Ejem: $$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{R}^1 & \subseteq & \mathbb{R}^2 & \subseteq & \mathbb{R}^3 & \subseteq & \dots & \mathbb{R}^\infty & \\ \cup\!| & & \cup\!| & & \cup\!| & & & \cup\!| & \\ S^0 & \subseteq & S^1 & \subseteq & S^2 & \subseteq & \dots & S^\infty := \varinjlim_n S^n \end{array}$$

$S^\infty = \{ x \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_n x_n^2 = 1 \}$ c/topología de subespacio de $\mathbb{R}^\infty$.

Ejem: $$\begin{array}{ccccccccc} S^0 & \subseteq & S^1 & \subseteq & S^2 & \subseteq & \dots & S^\infty \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ \mathbb{R}P^0 & \subseteq & \mathbb{R}P^1 & \subseteq & \mathbb{R}P^2 & \subseteq & \dots & \mathbb{R}P^\infty := \varinjlim_n \mathbb{R}P^n \end{array}$$

$$\mathbb{R}P^\infty = S^\infty \Big/ \begin{matrix} x \sim \pm x \\ \forall x \end{matrix}$$

Ejem: $$\begin{array}{ccccccccc} S^1 & \subseteq & S^3 & \subseteq & S^5 & \subseteq & \dots & S^\infty \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^0 & \subseteq & \mathbb{C}P^1 & \subseteq & \mathbb{C}P^2 & \subseteq & \dots & \mathbb{C}P^\infty := \varinjlim_n \mathbb{C}P^n \end{array}$$

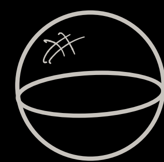
$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1$ y $\mathbb{C}P^\infty = S^\infty/S^1$

1.9 Homeomorfismos (Problemas de clasificación)

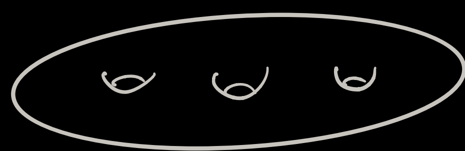
Tma (de clasificación de superficies)
Toda superficie cerrada y conexa es homeomorfa a una de las siguientes:

$S_0, \ S_1, \ S_2, \ldots$ (caso orientable)

$N_1, \ N_2, \ldots$ (caso no orientable)

donde: $S_0 = S^2$ esfera unitaria 

$S_g = \#_g T$ suma conexa de g toros



$N_g = \#_g \mathbb{RP}^2$ suma conexa de g $\mathbb{RP}^2$.

- Clasificación de 3-variedades.
  Ver 1.9.2, 1.9.3, 1.9.4 y 1.9.5
  Gran avance gracias a la Conjetura de Poincaré

- Clasificación de nudos en $\mathbb{R}^3$ es un problema abierto.
  Ver Kosniowski

 $K \subseteq \mathbb{R}^3$