Cap. 2 Homotopía.

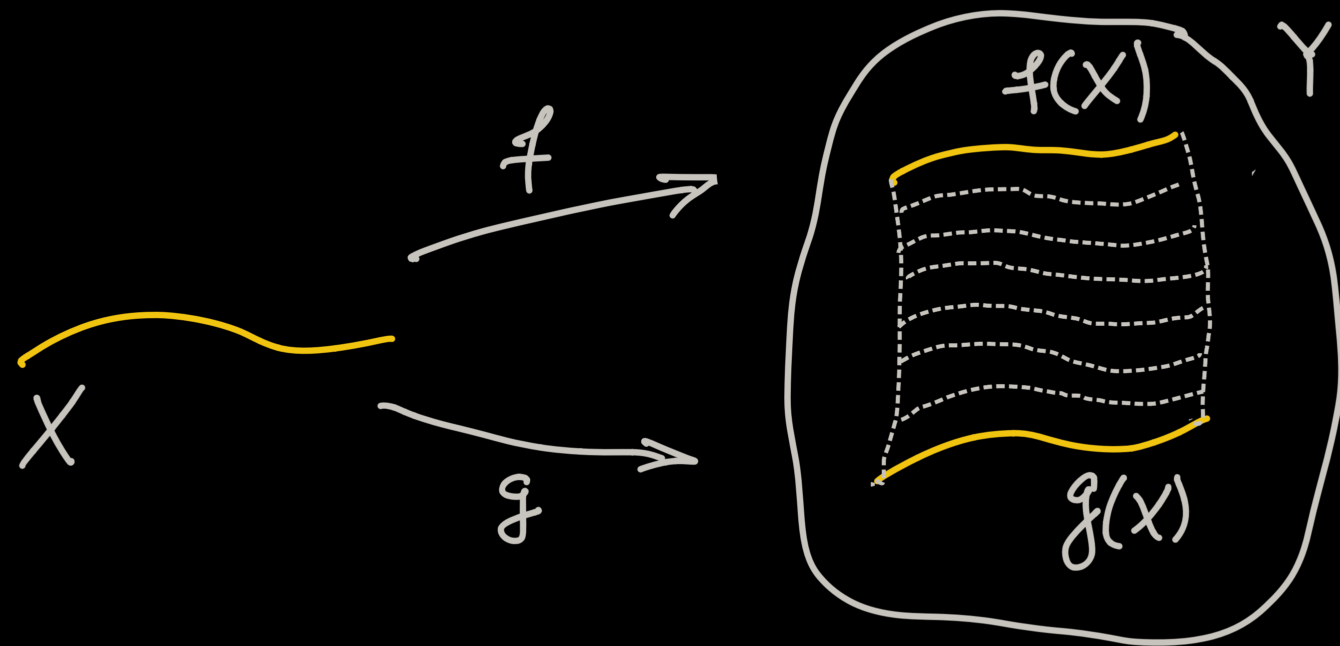
2.1 Mapeos Homotópicos

Def: Sean $f, g : X \to Y$ mapeos entre espacios top. Diremos que f y g son **homotópicos** si $\exists$

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y \quad \text{continua}$$

tal que:
- $H(x,0) = f(x)$
- $H(x,1) = g(x)$

$\forall x \in X.$

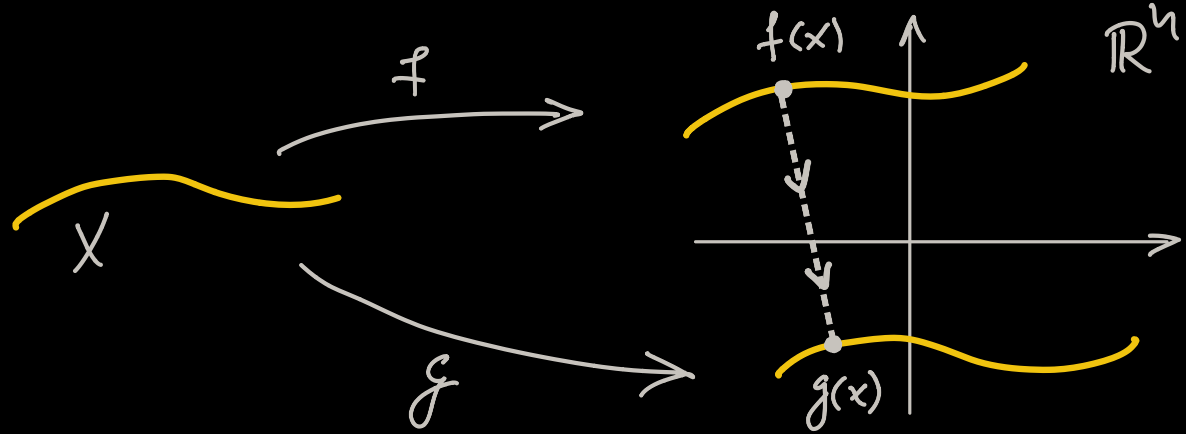


- H es una homotopía entre f y g. Escribimos $f \simeq g$.

- H se puede ver como una familia de mapeos $h_t : X \to Y$, $t \in [0,1]$ tales que $h_0 = f$, $h_1 = g$.

$$\{h_t\}_{t \in I} \quad \text{donde: } h_t(x) := H(x,t).$$

Ejem: Si $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ mapeos cualesquiera, entonces $f \simeq g$.



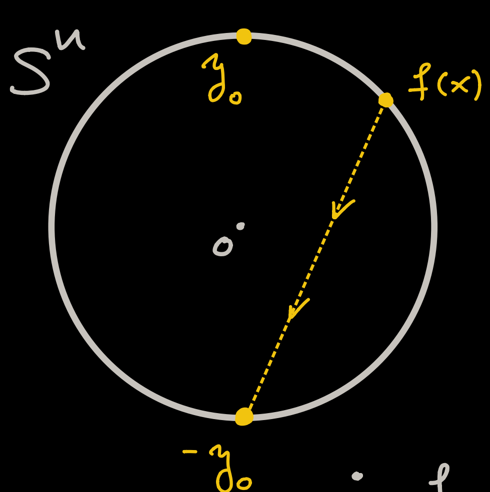
Definimos: $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$ por:

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + t\,g(x)$$

Obviamente: $H(x,0) = f(x)$ & $H(x,1) = g(x)$.

Ejem: Todo mapeo $f : X \to S^n$ que no sea sobre, es homotópico a un mapeo constante.

Sea $y_0 \in S^n$, $y_0 \notin f(X)$.



$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + t(-y_0)}{\|(1-t)f(x) + t(-y_0)\|}$$

$$H(x,0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x)$$

$$H(x,1) = \frac{-y_0}{\|-y_0\|} = -y_0 \quad \text{cte.}$$

$\therefore$ f homotópico al mapeo cte. $-y_0$.

Tma: La $\simeq$ es una R.E. en el conjunto de mapeos $f: X \to Y$.

Dem: ① Si $f: X \to Y$, definimos $H: X \times I \to Y$ por: $H(x,t) = f(x)$ $\forall (x,t)$. $\therefore$ $f \simeq f$.

②. Si $f, g: X \to Y$ y $f \simeq g$, $\exists$ $H: X \times I \to Y$ tal que: $\left.\begin{aligned} H(x,0) &= f(x) \\ H(x,1) &= g(x) \end{aligned}\right.$ $\forall x \in X$.

Definimos $K: X \times I \to Y$ por $K(x,t) = H(x, 1-t)$. Entonces $g \simeq f$.

③. Si $f \simeq g$ y $g \simeq h$ existen

$H_1 : X \times I \to Y$	$H_2 : X \times I \to Y$
$H_1(x,0) = f(x)$	$H_2(x,0) = g(x)$
$H_1(x,1) = g(x)$	$H_2(x,1) = h(x)$

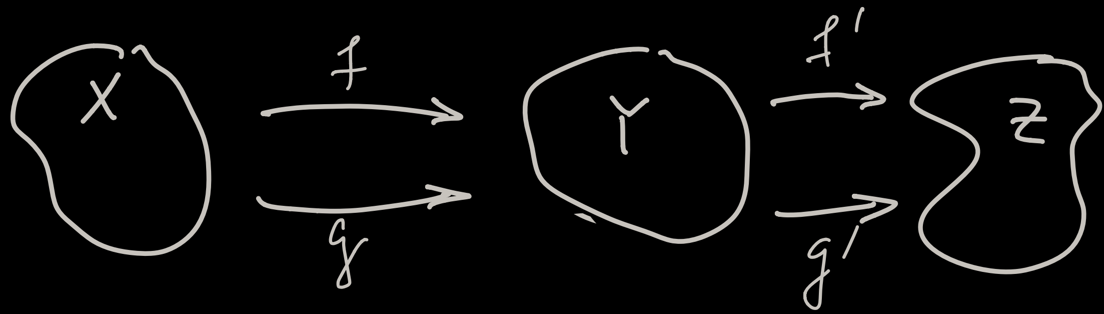
Definimos: $H: X \times I \to Y$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

H es continua (Lema de pegado Munkres)

$\Rightarrow f \simeq h$. $\blacksquare$

Tma: Si $f, g : X \to Y$, $f', g' : Y \to Z$ mapeos t.q. $f \simeq g$ y $f' \simeq g'$ entonces $f' \circ f \simeq g' \circ g$.



Dem: $H_1 : f \simeq g$ homotopías $H_1 : X \times I \to Y$
$H_2 : f' \simeq g'$ $H_2 : Y \times I \to Z$

Definimos $H : X \times I \to Z$ por

$$H(x,t) = H_2(H_1(x,t), t).$$

Entonces:

$$H(x,0) = H_2(H_1(x,0), 0) = H_2(f(x), 0) = f'(f(x))$$

$$H(x,1) = H_2(H_1(x,1), 1) = H_2(g(x), 1) = g'(g(x))$$

$\therefore \quad f' \circ f \simeq g' \circ g.$ ■

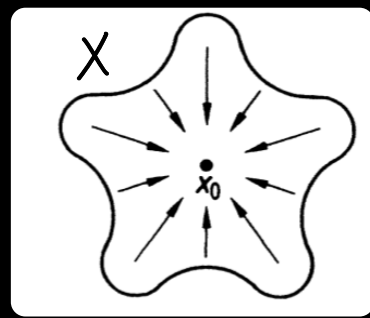
Similarmente: $f' \circ f \simeq f' \circ g \simeq g' \circ g$

¿Homotopías?

Def:

a). Un mapeo $f: X \to Y$ es homotópicamente trivial ó nul-homotópico si $f \simeq$ a un mapeo constante.

b). Un espacio X es contraíble si la función identidad $id: X \to X$ es nul-homotópica.



i.e. $\exists\, x_0 \in X$ y una homotopía $H: X \times I \to X$ tal que $H(x,0) = x$, $H(x,1) = x_0$ $\forall x \in X$.

Def: La clase de homotopía de un mapeo $f: X \to Y$ es el conjunto:

$$[f] = \{ \underbrace{g: X \to Y}_{\text{mapeo}} \mid g \simeq f \}$$

- $[X, Y] = \{ [f] \mid f: X \to Y \text{ mapeo} \}$
  = conjunto de clases de homotopía de mapeos de X en Y.

- Si Y es arco-conexo, cualesquiera dos mapeos nul-homotópicos son homotópicos. Denotamos $0 \in [X, Y]$ la clase de homotopía de los mapeos nul-homotópicos.

Ejems:

a). Si $f, g : X \to \mathbb{R}^n$, entonces $f \simeq g$.

i.e. $[X, \mathbb{R}^n] = 0$.

b). Todo mapeo $f : \mathbb{R}^n \to Y$ es nul-homotópico.

$H : \mathbb{R}^n \times I \to Y$, $\quad H(x,t) = f(tx)$.

$$H(x,0) = f(0) = y_0 \quad \text{cte.}$$
$$H(x,1) = f(x).$$

Y arco-conexo $\Rightarrow [\mathbb{R}^n, Y] = 0$.

c). Si $X = \{x_0\}$ pto., Y arbitrario

$[*, Y] =$ componentes arco-conexas de Y.

d). $f : X \to Y$ nul-homotópico y $g : Y \to Z$ arbitrario entonces $g \circ f \simeq *$.

e) Y contraíble $\Rightarrow [X, Y] = 0 \quad \forall$ espacio X.

f). X contraíble y Y arco-conexo

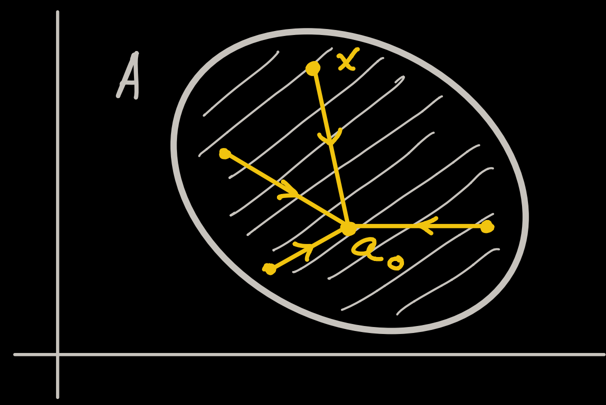
$\Rightarrow [X, Y] = 0$.

g). Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, entonces A es contraíble.

Sea $a_0 \in A$ fijo.

$H : A \times I \longrightarrow A$

$H(x,t) = (1-t)x + ta_0$



Def: Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos mapeos que coinciden en un subespacio $A \subseteq X$ i.e. $f|_A = g|_A$.

Decimos que f y g son homotópicos c/respecto a A si $\exists$ una homotopía $H : X \times I \longrightarrow Y$ entre f y g tal que: $H(a,t) = f(a) = g(a)$ $\forall a \in A, t \in I$.

H es una homotopía relativa. $f \simeq g$ rel A

Def: Una homotopía de pares $h_t : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ es una homotopía $h_t : X \rightarrow Y$ t.q. $h_t(A) \subseteq B$ $\forall t \in I$.

$f = h_0$
$g = h_1$
se dicen homotópicos como mapeos de pares $(X,A) \longrightarrow (Y,B)$.

- Si $f : (X,A) \rightarrow (Y,B)$, $[f] = \{ g \mid g \simeq f : (X,A) \rightarrow (Y,B) \}$
- $[X, A ; Y, B] = \{ [f] \mid f : (X,A) \longrightarrow (Y,B) \}$

Ejercicio: Sea $I = [0,1]$, $\partial I = \{0,1\}$

Probar que $[I, I] = 0$ pero que $[I, \partial I; I, \partial I]$ consiste de 4 elementos.

Def: Una pareja (X, x_0) con $x_0 \in X$ se llama un espacio con pto. base.

- $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ mapeo de espacios basados
- $h_t : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homotopía que preserva el pto. base

$H : X \times I \to Y$

tal que $H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t \in I$.

- $f \simeq g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$
- $f \simeq g : X \to Y \mod x_0$

Compatibilidad entre $\simeq$ y topología cociente Ver Tma. 2.1.11 y Cor. 2.1.12.

Ejercicio: Probar que el cono $CX = X \times I / X \times 1$ es contraíble.

Próx. clase: Mapeos $f: S^1 \to S^1$

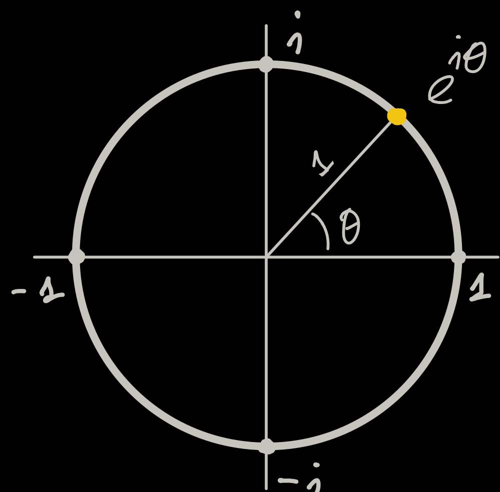
Función exponencial

$$\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto e^z$$

donde: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Si $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$



Forma polar

Para $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ & $-\pi < \theta < \pi$:

$$\log z = \ln r + i\theta$$

Rama principal del logaritmo.

$r = 1$