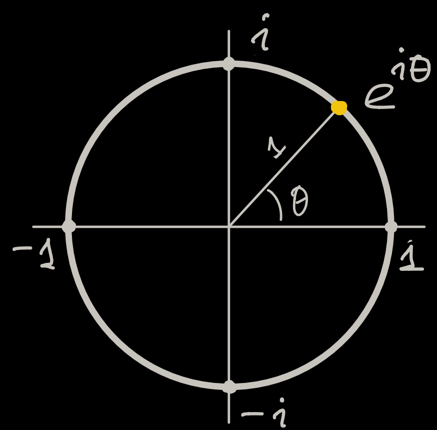
2.1 Mapeos de S^1 en S^1.
(grado de un mapeo)

Exponencial compleja: $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Si $\theta \in \mathbb{R}$

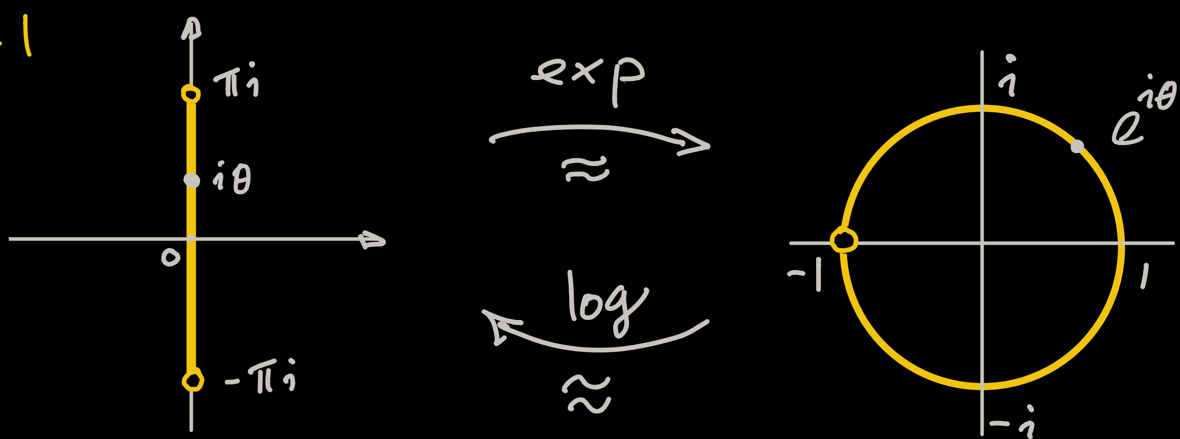
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$



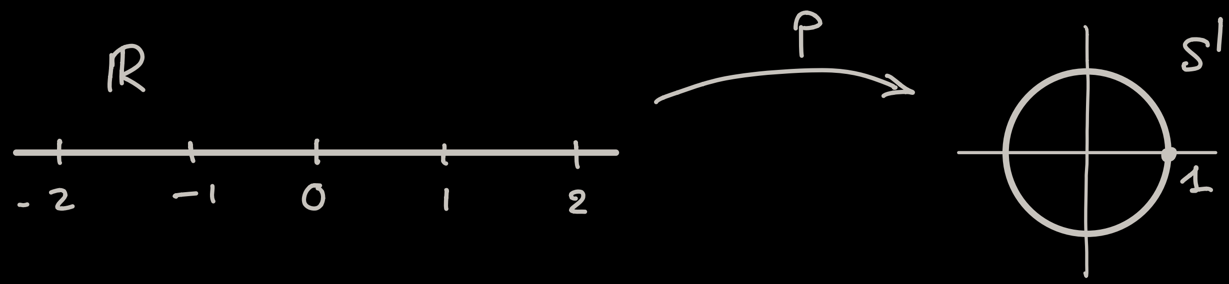
Rama principal del logaritmo: Para $z = r e^{i\theta}$ con $r > 0$ & $-\pi < \theta < \pi$

$$\log z = \ln r + i\theta$$

$r = 1$



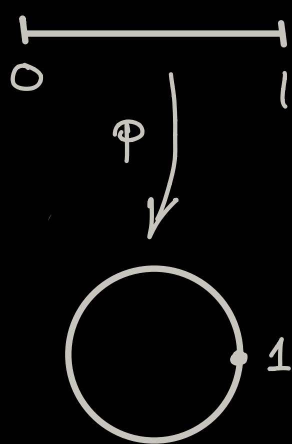
Sea $p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ continua, periódica, de periodo entero.
$t \longmapsto e^{2\pi i t}$



Restringida a $[0,1]$,

$$p: [0,1] \longrightarrow S^1$$

es una identificación (mapeo cociente).



Prop: Sea $\varphi: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que:

$$\varphi(0) = 0 \quad \& \quad \varphi(1) = n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces existe una única función continua

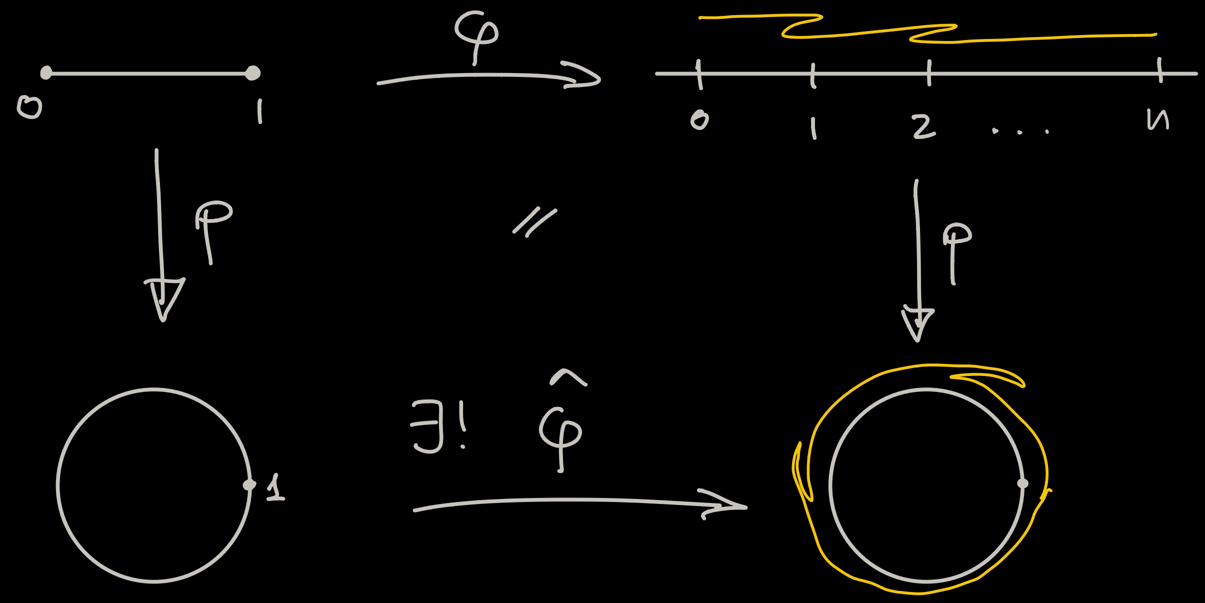
$$\hat{\varphi}: S^1 \longrightarrow S^1$$

tal que:

$$\hat{\varphi} \circ p = p \circ \varphi$$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
S^1 \arrow[r, dashed, "\exists! \hat{\varphi}"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

i.e. $\hat{\varphi}(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \varphi(t)}$



Lema: Para toda $f : S^1 \to S^1$ continua con $f(1) = 1$,
$\exists!\ \varphi : ([0,1], 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ continua tal que $f = \hat{\varphi}$

i.e. $\quad f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \varphi(t)}$.

Obs: Para $t = 1$, $\quad f(1) = e^{2\pi i \varphi(1)} = 1$

$\Rightarrow \quad \varphi(1) = n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Dem: 1 Unicidad.

Sean $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dos tales funciones

$$\hat{\varphi} = \hat{\psi} \implies e^{2\pi i \varphi(t)} = e^{2\pi i \psi(t)}$$

$$\implies \varphi(t) - \psi(t) \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$ la función $\varphi(t) - \psi(t)$ es continua y toma valores enteros $\therefore$ es constante.

Como $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, entonces $\varphi(t) = \psi(t)$.

② . Existencia: Dada $f: S^1 \to S^1$ con $f(1) = 1$, debemos construir $\varphi: I \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\varphi(0) = 0$
- $f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \varphi(t)}$

Sea $h: I \to S^1$, $h(t) = f(e^{2\pi i t})$.

h es uniformemente continua y $\therefore$ existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ de $[0,1]$ tal que:

$$|h(t) - h(t_j)| < 2 \quad \text{para } t \in [t_j, t_{j+1}]$$

$\therefore$ $h(t) \neq -h(t_j)$, $\dfrac{h(t)}{h(t_j)} \neq -1$ & $\log \dfrac{h(t)}{h(t_j)}$ está definido.

Definimos $\varphi: I \to \mathbb{R}$ de manera explícita:

Para $t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

Variable

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\left[\log \frac{h(t_1)}{h(t_0)} + \log \frac{h(t_2)}{h(t_1)} + \ldots + \log \frac{h(t_j)}{h(t_{j-1})} + \log \frac{h(t)}{h(t_j)}\right]$$

Entonces φ es continua y toma valores reales y se tiene:

$$e^{2\pi i \varphi(t)} = \frac{h(t_1)}{h(t_0)} \cdot \frac{h(t_2)}{h(t_1)} \cdots \frac{h(t_j)}{h(t_{j-1})} \cdot \frac{h(t)}{h(t_j)}$$

$$= h(t) = f(e^{2\pi i t}).$$

$\blacksquare$

Cor: Para toda $f: S^1 \to S^1$ continua, $\exists!$ $\varphi: (I,0) \to (\mathbb{R},0)$ continua tal que $f = f(1)\cdot \hat{\varphi}$

i.e. $f(e^{2\pi i t}) = f(1)\cdot e^{2\pi i \varphi(t)}$.

Dem: Tomamos $g(z) = \dfrac{f(z)}{f(1)}$ $\forall z \in S^1$

y entonces $g(1) = 1$.

Por el lema anterior $\exists!$ $\varphi: (I,0) \to (\mathbb{R},0)$ tal que $g = \hat{\varphi}$ $\Rightarrow$ $f(z) = f(1)\cdot \hat{\varphi}(z)$. $\blacksquare$

Obs: En este caso tenemos para $t=1$

$f(1) = f(1)\cdot e^{2\pi i \varphi(1)} \Rightarrow \varphi(1) = n \in \mathbb{Z}$.

Def: Sea $f: S^1 \to S^1$ un mapeo y $\varphi: I \to \mathbb{R}$ la única función continua t.q. $f(z) = f(1)\cdot \hat{\varphi}(z)$.

- El entero $\varphi(1) = n$ se llama el grado de f y se denota por $\deg(f)$.

- $\deg(f)$ indica el núm. de vueltas que $f(z)$ le da a S^1 (y en qué dirección) cuando z le da una vuelta a S^1.

Tma: Para $n \in \mathbb{Z}$, el mapeo $g_n : S^1 \longrightarrow S^1$, $z \longmapsto z^n$ tiene grado n.

Dem: Sea $\varphi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi_n(t) = nt$. Entonces $\varphi_n(0) = 0$

$$\hat{\varphi}_n(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \varphi_n(t)} = e^{2\pi i n t} \quad \text{i.e.} \quad \hat{\varphi}_n(z) = z^n.$$

$$\therefore \; g_n(z) = g_n(1) \cdot \hat{\varphi}_n(z) \qquad \left(\text{o sea, } \hat{\varphi}_n = g_n\right)$$

$$\therefore \; \deg(g) = \varphi_n(1) = n.$$

$\blacksquare$

Tma: Dos mapeos $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$ son homotópicos $\iff \deg(f) = \deg(g)$.

Dem: Sean $\varphi, \psi : (I, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ los mapeos correspondientes a f y g, i.e.

$$f = f(1) \cdot \hat{\varphi} \quad \& \quad g = g(1) \cdot \hat{\psi}.$$

$\Leftarrow$

Para $s \in [0,1]$ definimos $\varphi_s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi_s(t) = (1-s)\,\varphi(t) + s\,\psi(t).$$

Entonces φ_s es una homotopía entre φ y ψ

tal que $\varphi_s(0)=0$ y $\varphi_s(1)$ es un entero.

$= \deg(f) = \deg(g)$

Esta homotopía pasa al cociente y nos da una $\simeq$ entre $\hat{\varphi}$ & $\hat{\psi}$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi_s"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, dashed, "\hat{\varphi}_s"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Entonces $f \simeq \hat{\varphi} \simeq \hat{\psi} \simeq g$.

$\Longrightarrow$ Sup. $f \simeq g$ y sea $f_s : S^1 \to S^1$ una homotopía tal que $f_0 = f$ y $f_1 = g$.

Por el corolario, a todo $s \in [0,1]$ le corresponde una función continua $\varphi_s : I \to \mathbb{R}$ tal que:

única

- $\varphi_s(0) = 0$
- $\varphi_s(1) \in \mathbb{Z}$
- $f_s(z) = f_s(1) \cdot \hat{\varphi}_s(z)$

Afirmamos que φ_s es una homotopía entre φ y ψ. Por continuidad: $\varphi_0(1) = \varphi_1(1)$.

$$\Longrightarrow \deg(f) = \varphi(1) = \psi(1) = \deg(g).$$

Continuidad de φ_s: Adaptamos la construcción del Lema a este caso.

Sea $h_s : I \to S^1$, $h_s(t) = f_s(1)^{-1} \cdot f_s(e^{2\pi i t})$

Vista como función de dos variables,

$$\begin{aligned} I \times I &\longrightarrow S^1 \\ (s,t) &\longmapsto h_s(t) \end{aligned}$$

$h_s(t)$ es uniformemente continua,

$\therefore \exists$ una partición $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ tal que:

$$|h_s(t) - h_s(t_j)| < 2 \qquad \begin{array}{l} \forall s \in I \\ t \in [t_j, t_{j+1}] \end{array}$$

y definimos $\varphi_s(t)$ por una fórmula análoga a la del Lema:

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{i=1}^{j} \log \frac{h_s(t_i)}{h_s(t_{i-1})} + \log \frac{h_s(t)}{h_s(t_j)}\right]$$

$\therefore$ $$\begin{aligned} I \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s,t) &\longmapsto \varphi_s(t) \end{aligned}$$ es continua.

y $f_s(1) \cdot e^{2\pi i \varphi_s(t)} = f_s(e^{2\pi i t})$. **Ahora usar unicidad.**

$\blacksquare$

Propiedades de $\deg(f)$

a) $id : S^1 \to S^1$ tiene grado 1.

Dem:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, "id"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

φ es la inclusión

$\therefore \deg(id) = \varphi(1) = 1.$

b). Si $g : S^1 \to S^1$ es nul-homotópico, $\deg(g) = 0$.

Dem:

$g \simeq$ mapeo constante $\simeq g_0$

$\Longrightarrow \deg(g) = 0.$

c). Si $v : S^1 \to S^1$ (reflexión en el eje x),

$z \longmapsto \overline{z}$

entonces $\deg(v) = -1$.

Dem: $\forall z \in S^1, \quad v(z) = \overline{z} = z^{-1} = g_{-1}(z).$

$$\therefore \deg(v) = \deg(g_{-1}) = -1 .$$

d) Si $f,g : S^1 \longrightarrow S^1$, $\deg(f\circ g) = \deg(f)\cdot \deg(g)$.

Dem: Supongamos $\deg(f) = m$ & $\deg(g) = n$

entonces: $f \simeq g_m$ & $g \simeq g_n$.

$\therefore\ f\circ g \simeq g_m \circ g_n = g_{mn}$

$\therefore\ \deg(f\circ g) = mn.$

e). Todo homeo. $f : S^1 \to S^1$ tiene grado ± 1.

Dem: $f\circ f^{-1} = id \Rightarrow \deg(f)\cdot\deg(f^{-1}) = 1$

$\Rightarrow \deg(f) = \pm 1.$

Ejem: La inclusión $i : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ no es nul-homotópica.

Notemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "id"'] & \mathbb{C}^* \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & S^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} z \\ \big\downarrow \\ \dfrac{z}{|z|} \end{array}$$

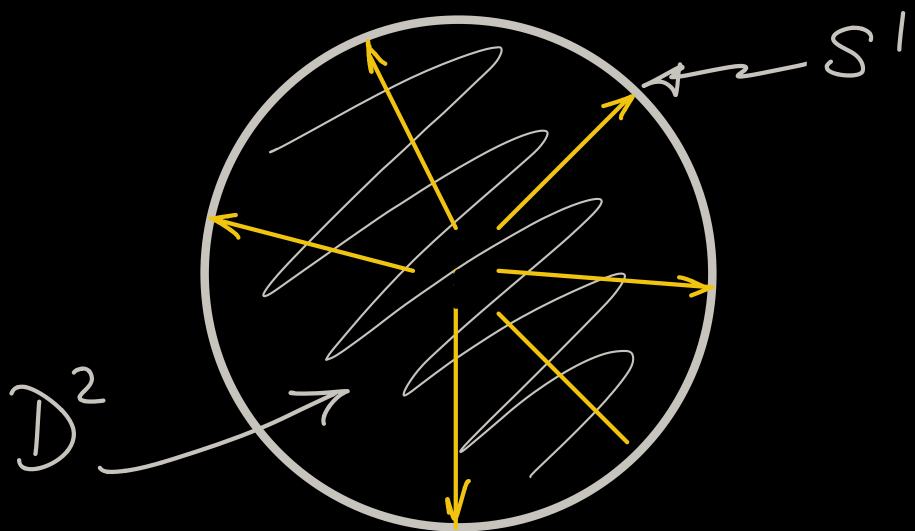
$f\circ i = id$

Si $i \simeq *$ entonces $id \simeq *$ #c.

Tma: S^1 no es contraible.

Dem: Si $id_{S^1} \simeq *$ entonces $\deg(id_{S^1}) = 0$ $\#_c$.

Tma: $\nexists$ un mapeo $r: D^2 \to S^1$ tal que $r(x) = x$ $\forall x \in S^1$.



Dem: Sup. que tal r existe. Definimos una homotopía $H: S^1 \times I \to S^1$ por:

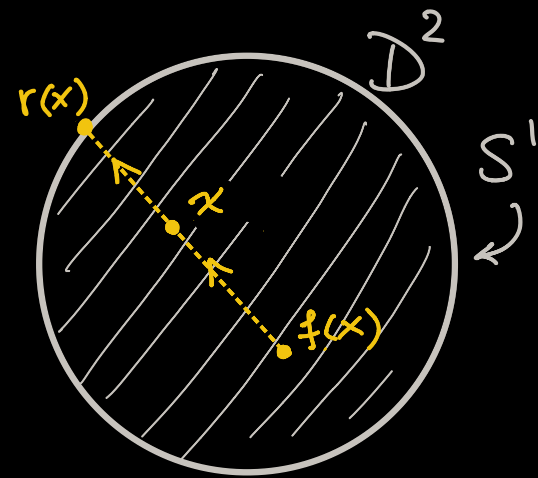
$$H(x,t) = r(tx).$$

Entonces, $\forall x \in S^1$:
$$H(x,0) = r(0) = \text{cte.}$$
$$H(x,1) = r(x) = x$$

$\therefore$ $id_{S^1} \simeq \text{cte.}$ $\#_c$.

Tma (del punto fijo de Brower)
Todo mapeo $f: D^2 \to D^2$ tiene un pto. fijo
i.e. $\exists\ x_0 \in D^2$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Dem: Sup. $f(x) \neq x \quad \forall x \in D^2$
y consideremos el rayo que parte de $f(x)$ en la dirección del punto x.



Sea $r(x)$ la intersección de dicho rayo con S^1.
Entonces, $r: D^2 \to S^1$ es continua y tal que
$r(x) = x \quad \forall x \in S^1$. $\#_c$ Tma. anterior

$\blacksquare$

Variación: Si f no tiene ptos. fijos y r se construye como arriba, entonces el sig. diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "id_{S^1}"'] & D^2 \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

$D^2 \simeq * \implies i \simeq *$

$\Rightarrow r \circ i \simeq id_{S^1} \simeq *$

$\#_c$