Clase pasada: Grado de $f: S^1 \to S^1$.

Resultado importante:

Dada $f: S^1 \to S^1$ continua $\exists!\ \varphi: I \to \mathbb{R}$ continua tal que:

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) \in \mathbb{Z}$
- $f(e^{2\pi i t}) = f(1) \cdot e^{2\pi i \varphi(t)}$.

Def: $\deg(f) := \varphi(1)$

Propiedades:

- $g_n(z) = z^n$, $\deg(g_n) = n \quad (n \in \mathbb{Z})$.
- $\deg(id) = 1$.
- $f, g: S^1 \to S^1$, $f \simeq g \iff \deg(f) = \deg(g)$.
- $f \simeq * \iff \deg(f) = 0$.
- $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

Estas prop. implican:

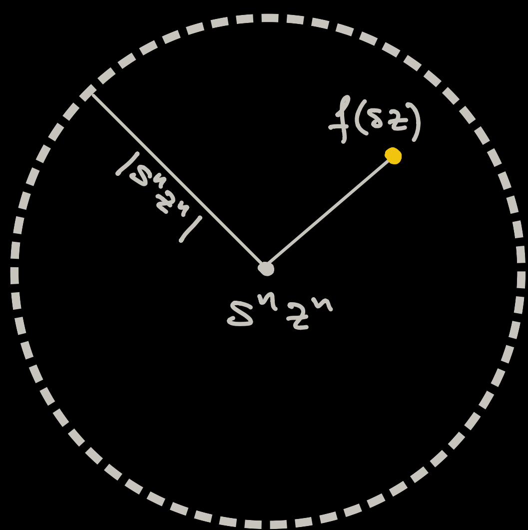
- S^1 no es contraíble
- Tma. de pto. fijo de Brower.

Tma (Fundamental del Algebra):
Todo polinomio $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ con $n > 0$ y $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

Dem: Sup. $f(z) \neq 0 \ \forall z$, ent. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continua.

Para $s = |a_0| + \dots + |a_{n-1}| + 1$ y $z \in S^1$ fijo

$$
\begin{aligned}
|f(sz) - s^n z^n| &\leq |a_0| + s|a_1| + \dots + s^{n-1}|a_{n-1}| \\
&\leq s^{n-1}(|a_0| + \dots + |a_{n-1}|) \\
&< s^n = |s^n z^n|
\end{aligned}
$$



$\therefore$ $f(sz)$ está en la bola abierta de centro $s^n z^n$ y radio $|s^n z^n|$.

Definimos una homotopía $H : S^1 \times I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ entre $f(sz)$ y $s^n z^n$ por:

$$H(z,t) = (1-t) f(sz) + t s^n t^n.$$

Entonces:

- La función $z \longmapsto f(sz)$ es nul-homotópica

Homotopía: $(z,t) \longmapsto f(tsz)$

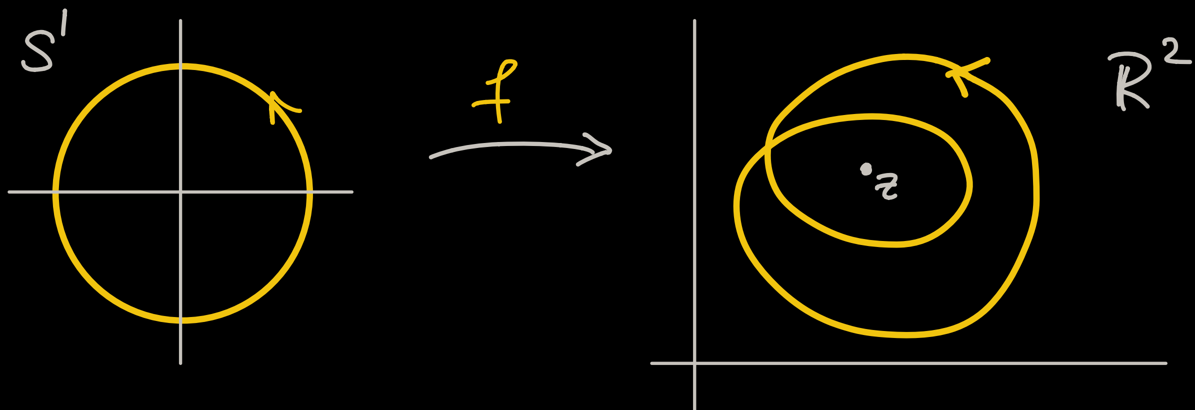
$\therefore$ $z \longmapsto s^n z^n$ también $\simeq *$.

• Esto implica que la composición

$$\begin{array}{ccccc} z & \longmapsto & s^n z^n & & \\ S^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & S^1 \\ & & w & \longmapsto & \frac{w}{|w|} \end{array}$$

es nul-homotópica. Pero tal composición es igual a $g_n(z) = z^n$ (grado positivo) $\#_c$. $\blacksquare$

Def: Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ continua y $z \in \mathbb{R}^2$, $z \notin f(S^1)$.



Sea $f_z : S^1 \to S^1$ dada por $f_z(x) = \dfrac{f(x) - z}{|f(x) - z|}$

Definimos el índice de f c/r a z como:

$$\mathrm{Ind}_f(z) := \deg(f_z).$$

$\left.\begin{array}{l} \text{• Indice de } f \text{ c/r a } z \\ \text{• Winding number of } f \text{ around } z \end{array}\right\} \; I(f,z)$

• Umlaufzahl von f bezüglich z, $\qquad U(f,z)$

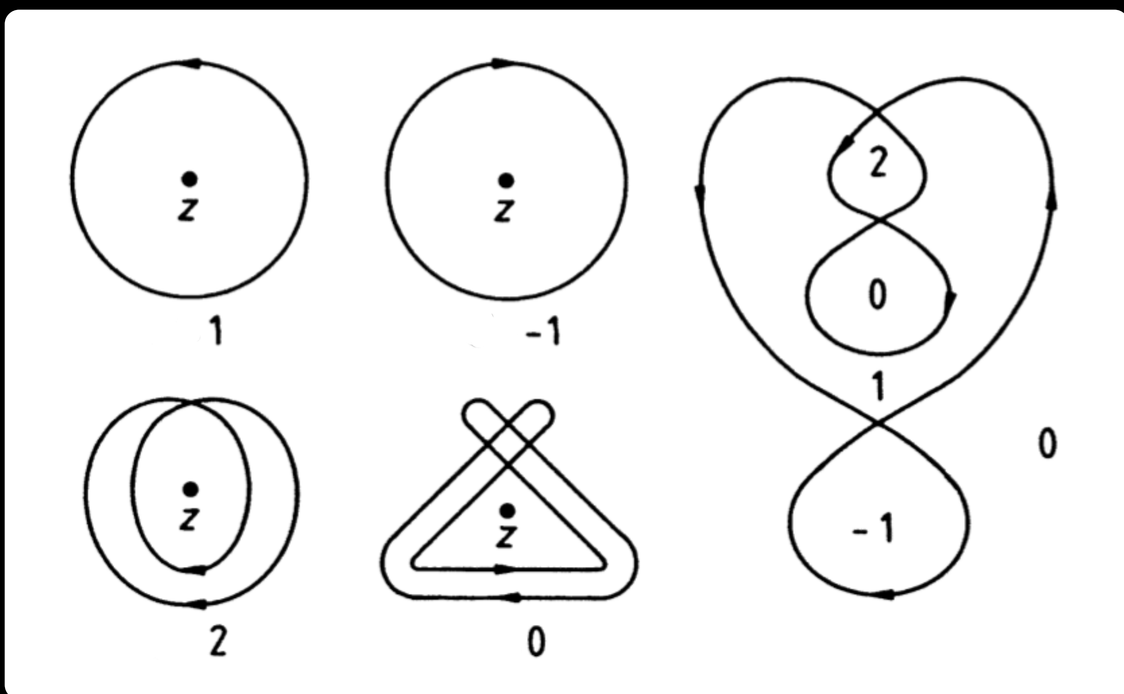
Tma: Si z, z' están en la misma componente arco-conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$, entonces

$$\operatorname{Ind}_f(z) = \operatorname{Ind}_f(z').$$

Dem: Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ una trayectoria de z a z'. Definimos una homotopía entre f_z y $f_{z'}$:

$$H(z,t) = \frac{f(x) - \gamma(t)}{|f(x) - \gamma(t)|}$$

$$f_z \simeq f_{z'} \implies \deg(f_z) = \deg(f_{z'}). \quad \blacksquare$$



Tma: Si $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ continua, $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ contiene una única componente arco-conexa no acotada.

Si z pertenece a dicha componente, $\operatorname{Ind}_f(z) = 0$.

Dem: S^1 compacto $\Rightarrow f(S^1)$ compacto

$\Rightarrow f(S^1) \subseteq D = \{ z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq r \}$

para algún r suf. grande.

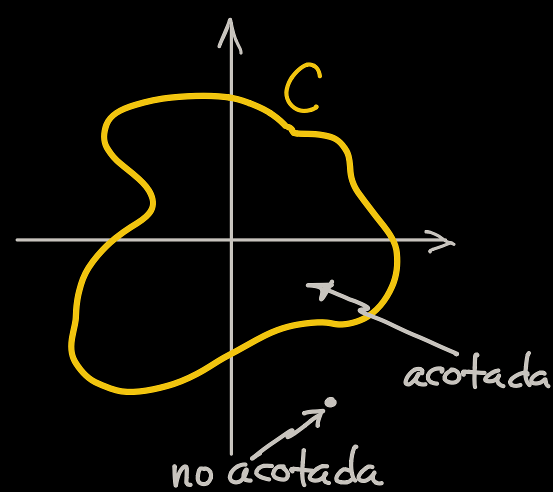
Notemos que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ es arco-conexo y toda componente no acotada V de $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ intersecta a $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

$\therefore$ $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ contiene una única componente arco-conexa, no acotada V.

- Si $z \in V$ y $z' \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, entonces $\operatorname{Ind}_f(z) = \operatorname{Ind}_f(z')$.
- Finalmente, notemos que $H(x,t) = \dfrac{tf(x) - z'}{|tf(x) - z'|}$

es una homotopía entre el mapeo cte. $-\dfrac{z'}{|z'|}$ y $f_{z'}$. $\therefore$ $\operatorname{Ind}_f(z') = 0$. ▨

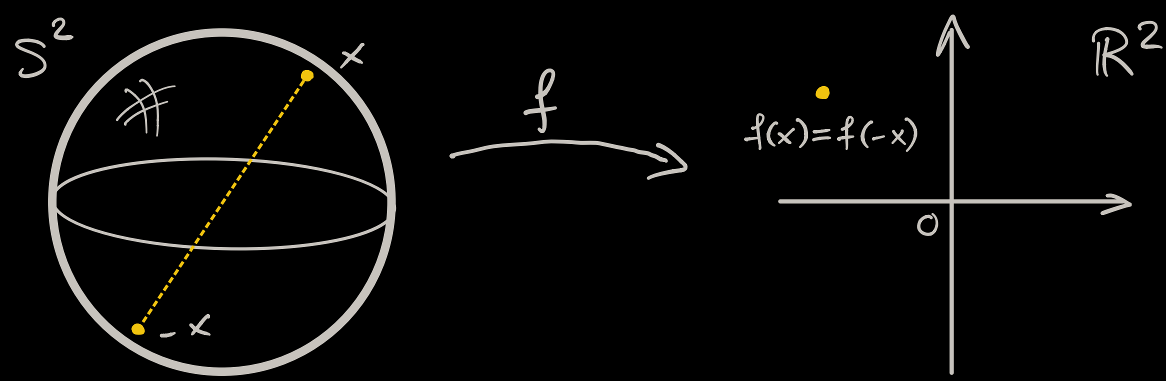
Tma: (de la curva de Jordan) Toda curva simple cerrada C en $\mathbb{R}^2$ separa al plano en dos componentes arco-conexas



Dem: Se usa homología.

Tma (Borsuk-Ulam):

Si $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua, $\exists\, x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.



Dem: Supongamos $f(x) \neq f(-x)$ $\forall x \in S^2$.

Def. • $f_1 : S^2 \to S^1$, $\quad f_1(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$

• $f_2 : D^2 \to S^1$, $\quad f_2(x_1, x_2) = f_1\left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)$

• $g = f_2|_{S^1}$

Vamos a obtener una contradicción.

a). Notemos que $H : S^1 \times I \to S^1$ dada por

$$H(z,t) = f_2(tz)$$

es una homotopía entre $f_2(0) = \text{cte.}$ y g.

$\therefore \quad \deg(g) = 0.$

b). Por otro lado:

$$f_1(-x) = -f_1(x) \implies g(-z) = -g(z) \quad \forall z \in S^1.$$

Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (como en la clase pasada) tal que:
tal que:

- $g(e^{2\pi i t}) = g(1) \cdot e^{2\pi i \varphi(t)}$
- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = \deg(g)$.

Entonces para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$:

$$g(e^{2\pi i (t+\frac{1}{2})}) = g(-e^{2\pi i t}) = -g(e^{2\pi i t})$$

y por lo tanto:

$$e^{2\pi i \varphi(t+\frac{1}{2})} = -e^{2\pi i \varphi(t)} = e^{2\pi i [\varphi(t) + \frac{1}{2}]}$$

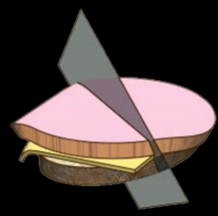
$\therefore \quad \varphi(t+\frac{1}{2}) = \varphi(t) + \frac{1}{2} + k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

$t=0 \qquad \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + k$

$t=\frac{1}{2} \qquad \varphi(1) = \varphi(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + k$

$$= 1 + 2k = \deg(g) \quad \#_c \quad ▨$$

Tma. del Sandwich de jamón



Para $a=(a_1,a_2,a_3)\in S^2$ y $d\in\mathbb{R}$ sean:

$$P(a,d)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=d\}$$

$$P^+(a,d)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\geq d\}$$

$$P^-(a,d)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\leq d\}$$

Supongamos $A_1, A_2, A_3\subseteq\mathbb{R}^3$ t.q.

i) Las funciones $f_j^{\pm}: S^2\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f_j^{\pm}(a,d)=\text{Vol. de } A_j\cap P^{\pm}(a,d)$$

están bien definidas y son continuas $(j=1,2,3)$.

ii) $\forall a\in S^2\ \exists!\ d_a\in\mathbb{R}$ t.q. $f_1^+(a,d_a)=f_1^-(a,d_a)$

y la función $\begin{aligned} S^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto d_a \end{aligned}$ es continua.

Ejercicio: $d_{-a}=-d_a$

Tma: Con las hipótesis anteriores $\exists$ plano en $\mathbb{R}^3$ que divide A_1, A_2 y A_3 c/u en dos partes de igual volumen.

Dem: Sea $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(a) = \left(f_2^+(a, d_a), f_3^+(a, d_a) \right)$$

- (i), (ii) $\Longrightarrow$ f continua
- Borsuk-Ulam $\Longrightarrow$ $\exists\, b \in S^2$ t.q. $f(-b) = f(b)$.

Para este b:

$$\begin{aligned} f_j^+(b, d_b) &= f_j^+(-b, d_{-b}) \\ &= f_j^+(-b, -d_b) \qquad j = 2, 3. \\ &= f_j^-(b, d_b) \end{aligned}$$

También se tiene: $f_1^+(b, d_b) = f_1^-(b, d_b)$

$\blacksquare$

2.3 Extensión de mapeos y homotopías.

Pregunta: Dada una pareja de espacios $A \subseteq X$ y una función continua $f: A \to Y$ ¿Existirá una extensión de f a todo X?

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, dashed, "\exists F\,?"] & & \\
A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

i.e. $\exists\ F: X \to Y$ continua tal que $F|_A = f$?

Def: $A \subseteq X$ es un retracto de X si existe $r: X \to A$ continua tal que $r(a) = a \ \forall a \in A$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, dashed, "\exists r"] & & \\
A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[rr, "id_A"'] & & A
\end{tikzcd}$$

$\exists\ r: X \to A$ continua tal que $r|_A = id_A$.

r se llama una retracción.

Ejem: S^1 no es un retracto del disco D^2.

$$\begin{tikzcd}
D^2 \arrow[drr, dashed, "\nexists r \text{ continua.}"] & & \\
S^1 \arrow[u, hook, "i"] \arrow[rr, "id"'] & & S^1
\end{tikzcd}$$

Si $\exists\ r: D^2 \to S^1$

$id = r \circ i \simeq *$

$deg(id) = 0 \quad \#_c.$

Recordemos que si $A \subseteq X$ es cerrado y $f: A \to Y$ es continua

construimos el espacio de adjunción $Y \cup_f X$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\
Y \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & Y \cup_f X \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\Phi"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Si $\varphi: X \to Z$
$\psi: Y \to Z$
continuas t.q.
$$\varphi|_A = \psi \circ f$$
$\exists!\ \Phi: Y \cup_f X \to Z$
t.q. $\Phi|_X = \varphi$, $\Phi|_Y = \psi$.

Tma: Sean $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$, con A cerrado en X.
Entonces:

f se puede extender a $X \iff Y$ es un retracto de $Y \cup_f X$.

Dem: Ejercicio.

Tma: Un mapeo $f: S^n \to Y$ es nul-homotópico

$\iff f$ se puede extender a D^{n+1}

$\iff Y$ es un retracto de $Y \cup_f e^{n+1}$

Dem: Ejercicio.