2.3 Extensión de mapeos y homotopías.

Pregunta: Dados espacios $A \subseteq X$ y $f: A \to Y$ continua, ¿se puede extender f a todo X?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, dashed, "\exists F\ ?"] & & \\ A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & Y \end{tikzcd}$$

i.e. $\exists\ F: X \to Y$ continua tal que $F|_A = f$?

Def: $A \subseteq X$ es un retracto de X si existe $r: X \to A$ continua tal que $r(a) = a\ \forall a \in A$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, dashed, "\exists r \text{ continua}"] & & \\ A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[rr, "id_A"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & A \end{tikzcd}$$

$\exists\ r: X \to A$ continua tal que $r|_A = id_A$.

r se llama una retracción.

Ejem: S^1 no es un retracto del disco D^2.

$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[drr, dashed, "\nexists r \text{ continua.}"] & & \\ S^1 \arrow[u, hook, "i"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & S^1 \end{tikzcd}$$

Si $\exists\ r: D^2 \to S^1$ cont.

$id = r \circ i \simeq *$

$\deg(id) = 0$ $\quad \#_c$.

Ejem: De manera más general, se puede probar que S^{n-1} no es un retracto del disco D^n.

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[dr, dashed, "\nexists\, r \text{ continua.}"] & \\ S^{n-1} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "id"'] \arrow[ur, phantom, "="] & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

Si $\exists\ r: D^n \to S^{n-1}$ cont.

$id = r \circ i \simeq *$

ya que D^n es contraíble

Más adelante usaremos los grupos de homología de S^{n-1} para probar que id no es nul-homotópica.

$\#_c$.

Ejem: Si X, Y son espacios y $y_0 \in Y$, X se puede ver como subespacio de $X \times Y$:

$$\begin{aligned} i: X &\hookrightarrow X \times Y \\ x &\longmapsto (x, y_0) \end{aligned}$$

Sea $r: X \times Y \to X$ la función $r(x,y) = x$. Entonces $r \circ i = id_X$. Por lo tanto, X es un retracto de $X \times Y$.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[dr, "r"] & \\ X \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "id"] \arrow[ur, phantom, "="] & X \end{tikzcd}$$

Similarmente, Y es retracto de $X \times Y$.

Recordemos:

Si $A \subseteq X$ cerrado y $f: A \to Y$ continua definimos $Y \cup_f X$ (espacio de adjunción)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \\
Y \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & Y \cup_f X \arrow[dr, dashed, "\exists!\, \Phi"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Si $\varphi: X \longrightarrow Z$

$\psi: Y \longrightarrow Z$

continuas t.q.

$$\varphi|_A = \psi \circ f$$

$\exists!\ \Phi: Y \cup_f X \to Z$

t.q. $\Phi|_X = \varphi$, $\Phi|_Y = \psi$.

Tma: Sean $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$ como antes. Entonces:

f se puede extender a $X \iff Y$ es un retracto de $Y \cup_f X$.

Dem:

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "F \text{ extensión}"] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \\
Y \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "id"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & Y \cup_f X \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$ Fácil.

Tma: Un mapeo $f: S^n \to Y$ es nul-homotópico

$\iff$ f se puede extender a D^{n+1}

$\iff$ Y es un retracto de $Y \cup_f e^{n+1}$

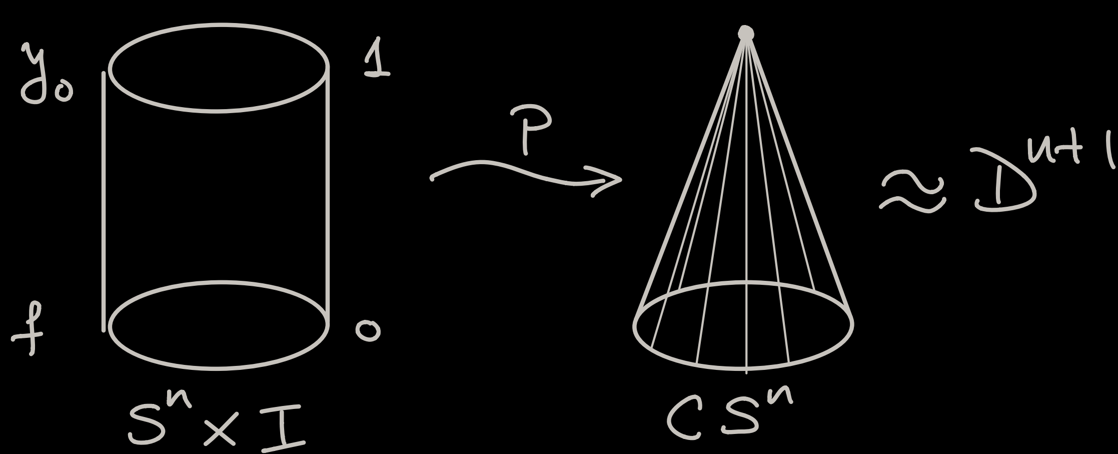
Dem: Probamos la primera equivalencia.

$(\Rightarrow)$ Si $f \simeq *$ $\exists$ $H: S^n \times I \to Y$ continua

tal que: $H(x,0) = f(x)$ $\quad \forall x \in S^n$
$H(x,1) = y_0$ cte.

$$\begin{tikzcd}
S^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & Y \\
S^n \times I / S^n \times 1 \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

cono de S^n $\Rightarrow$ $S^n \times I / S^n \times 1$



$\therefore$ f se puede extender a D^{n+1}!

$$\begin{tikzcd}
D^{n+1} \arrow[dr, dashed, "\exists F"] & \\
S^n \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "//"] & Y
\end{tikzcd}$$

$f = F \circ i$

pero $i \simeq *$

$\therefore F \circ i \simeq * \quad \Rightarrow f \simeq *$ ∎

Def: Una pareja de espacios $A \subseteq X$ tiene la Prop. de Extensión de Homotopías (PEH) si:

- A es cerrado en X
- Para todo esp. Y, toda homotopía $H : A \times I \to Y$ y toda $F : X \to Y$ cont. con $F(a) = H(a,0)$ $\forall a \in A$

  $\exists\, \tilde{H} : X \times I \to Y$ continua

  tal que $\tilde{H}|_{A \times I} = H$ y $\tilde{H}(x,0) = F(x)$ $\forall x \in X$

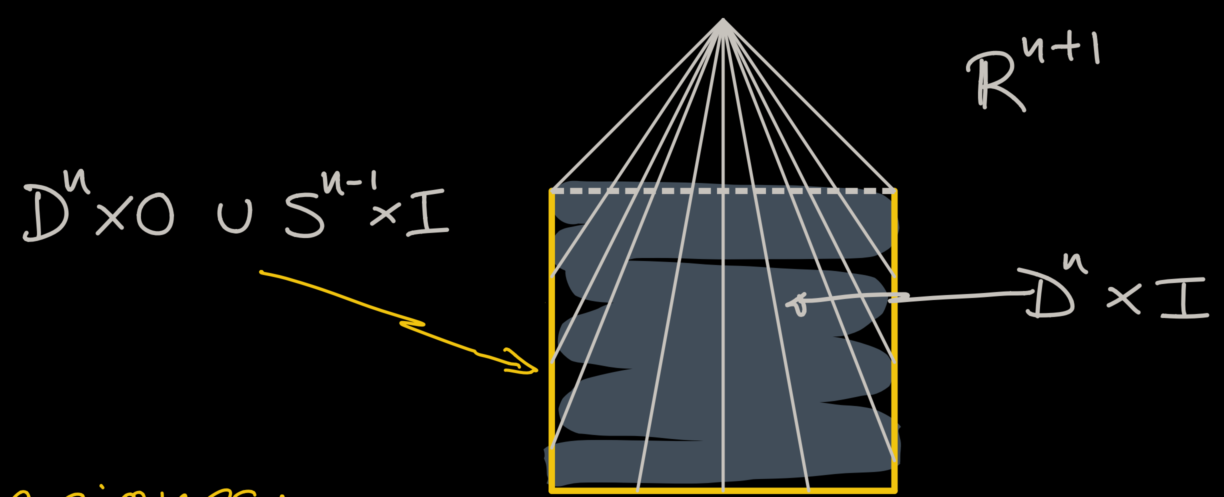
$$\begin{tikzcd}
A \approx A \times 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "//"] & A \times I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
X \approx X \times 0 \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "F"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\exists \tilde{H}"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

i.e. si $h_t : A \to Y$ es una homotopía y h_0 se puede extender a todo X, entonces la homotopía h_t se puede extender a X.

Tma: (X,A) tiene la PEH si y solo si;
$W=(X\times 0)\cup(A\times I)$ es un retracto de $X\times I$

Dem: Ver Teorema 2.3.5.

Ejem: (D^n, S^{n-1}) tiene la PEH ya que
$(D^n\times 0)\cup(S^{n-1}\times I)$ es retracto de $D^n\times I$.



Aplicaciones:

1. Sup. (X,A) tiene la PEH.
Si $f\simeq g: A\to Y$ y f se puede extender a X, entonces g también se puede extender a X.
En particular, todo $g: A\to Y$ nul-homotópico se puede extender a X.

2. Sean $(X,x_0),(Y,y_0)$ espacios c/pto. base y sup. que (X,x_0) tiene la PEH y Y arco-conexo.
Entonces toda $f: X\to Y$ continua es $\simeq$ a un mapeo que preserva ptos. base. Ejercicio.

2.4 Tipo de Homotopía

Def: Un mapeo $f: X \to Y$ es una equivalencia homotópica si existe un mapeo $g: Y \to X$ tal que:

$$g \circ f \simeq id_X \quad \& \quad f \circ g \simeq id_Y$$

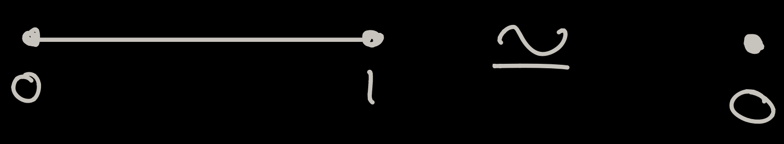
En tal caso escribimos:

- $X \simeq Y$, X & Y homotópicamente equivalentes.
  X & Y mismo tipo de homotopía.
- $f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ equivalencia homotópica
- $g: Y \xrightarrow{\simeq} X$ equiv. homotópica inversa.

Ejem: $X = [0,1]$, $Y = \{0\}$

$$f: [0,1] \longrightarrow \{0\}, \quad g: \{0\} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto 0 \qquad\qquad \text{inclusión}$$

$$\therefore \; g \circ f = 0 \simeq id_{[0,1]}, \quad f \circ g = 0 = id_{\{0\}}$$



Ejem: $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \{0\}$ (donde $0 \in \mathbb{R}^n$).

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{0\}, \qquad g : \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto 0 \qquad\qquad \text{inclusión}$$

$\therefore$ $g \circ f = 0 \simeq id_{\mathbb{R}^n}$ (homotopía de línea recta)

$f \circ g = 0 = id_{\{0\}}$.

Entonces $\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$. ($\mathbb{R}^n$ es contraíble)

Ejem: $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $Y = S^{n-1}$

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}, \qquad g : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|} \qquad\qquad \text{inclusión}$$

$g \circ f \simeq id_{\mathbb{R}^n \setminus 0}$, $\quad H(x,t) = (1-t)x + t\dfrac{x}{\|x\|}$

Homotopía por deformación radial

$f \circ g = id_{S^{n-1}}$

$\therefore$ $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$.

Propiedades:

a) $f: X \xrightarrow{\cong} Y \implies f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ pero $\not\Leftarrow$.

b) $f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ & $g: Y \xrightarrow{\simeq} Z \implies g \circ f: X \xrightarrow{\simeq} Z$

c) $\simeq$ de espacios es una R.E.

d) $X \simeq * \iff X$ es contraíble.

Def: $A \subseteq X$ es un retracto por deformación de X si $\exists$ homotopía $h_t: X \longrightarrow X$ tal que:

- $h_0 = id_X$
- $h_1(X) \subseteq A$
- $h_1(a) = a \quad \forall a \in A$.

i.e. $h_1: X \longrightarrow A$ es una retracción & $h_1 \simeq id_X$

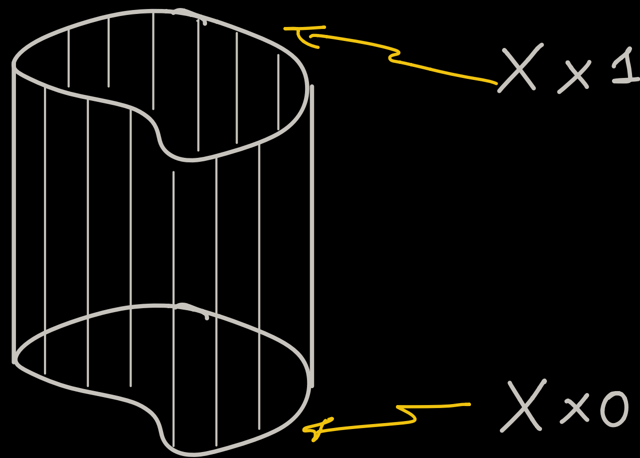
Si además $h_t(a) = a \quad \forall a \in A,\ t \in I$,
A es un retracto fuerte por deformación de X.

Ejems:

a). $X\times 0$ y $X\times 1$ son retractos fuertes por deformación de $X\times I$.

$X\times I$

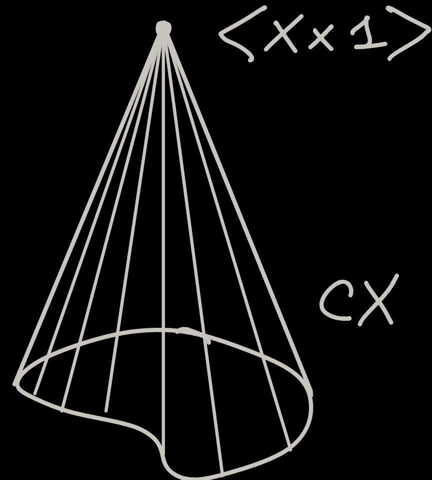
cilindro de X



b). El vértice del cono

$$CX = X\times I \big/ X\times 1$$

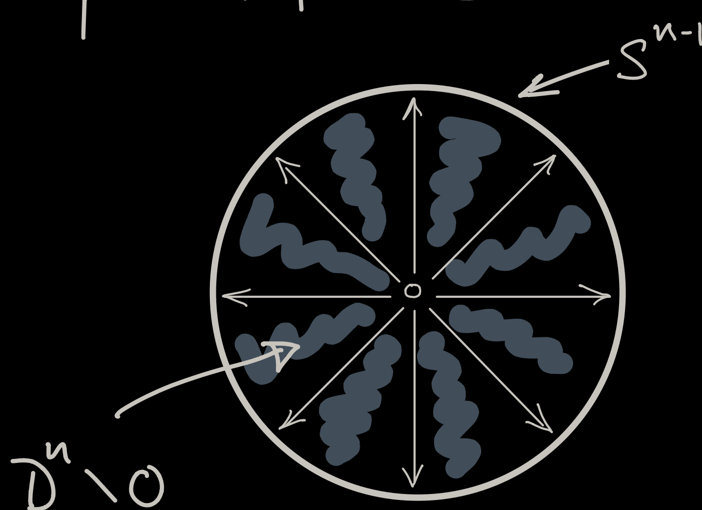
es un retracto fuerte por deformación de CX.



c). S^{n-1} es retracto fuerte por def. de $D^n\setminus 0$ y de $\mathbb{R}^n\setminus 0$.

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$

Deformación radial



Tma: Si (X, A) tiene la PEH, las sigs. son equiv.:

a). $i: A \hookrightarrow X$ es una equiv. homotópica.

b). A es retracto por def. de X.

c) A es retracto fuerte por def. de X.

Dem: Ver Tma. 2.4.4.

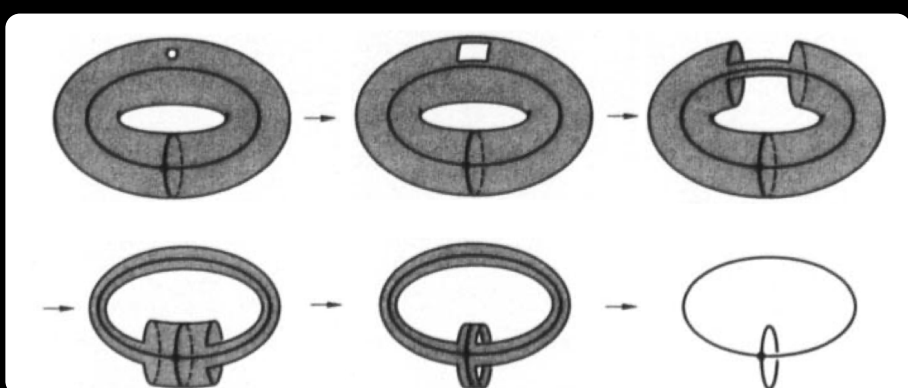
Tma: Si $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$, A cerrado y retracto fuerte por def. de X, entonces:

Y retracto fuerte por def. de $Y \cup_f X$.

Dem: Ver Tma. 2.4.6.

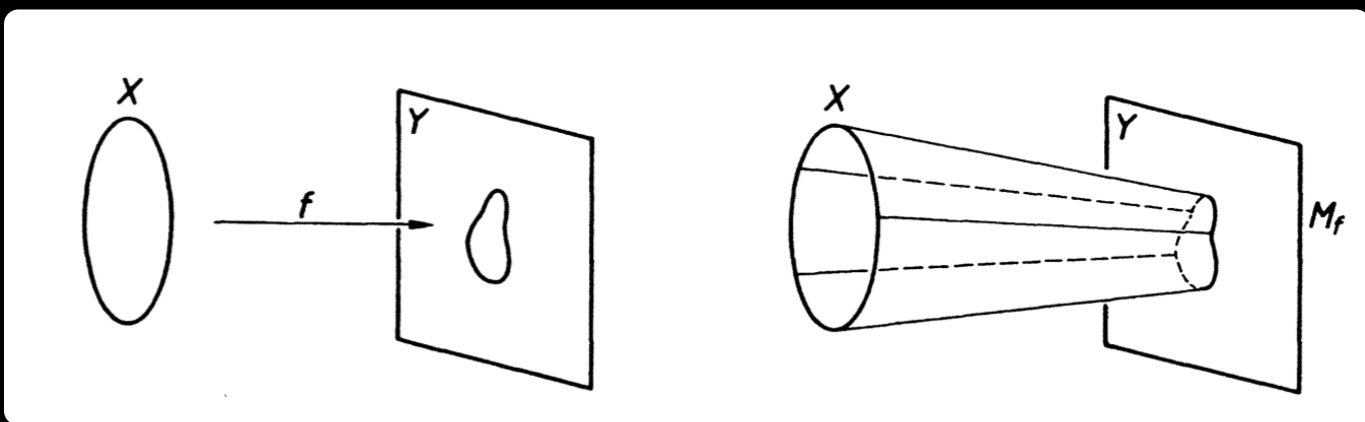
Cor: Si Z se obtiene pegando una n-celda a Y y z_0 es un pto. en el interior de la celda, entonces: Y es retracto fuerte por def. de $Z \setminus z_0$.

Ejem:



Def: Sea $f: X \longrightarrow Y$ un mapeo. Definimos el cilindro del mapeo f, M_f, como el espacio que se obtiene pegando $X \times I$ con Y por medio de f:

$$M_f := \left. (X \times I) \amalg Y \middle/ \begin{array}{l} (x,1) \sim f(x) \\ \forall x \in X \end{array} \right.$$



M_f = mapping cylinder

Obs:

1. Existe un encaje cerrado $i: X \longrightarrow M_f$
$\qquad x \longmapsto \langle x, 0 \rangle$

2. El mapeo $r: M_f \longrightarrow Y$ es una retracción
$\qquad \langle x, t \rangle \longmapsto f(x)$
$\qquad y \longmapsto y$

y es de hecho una equiv. homotópica.