Cap. 4 CW-Complejos

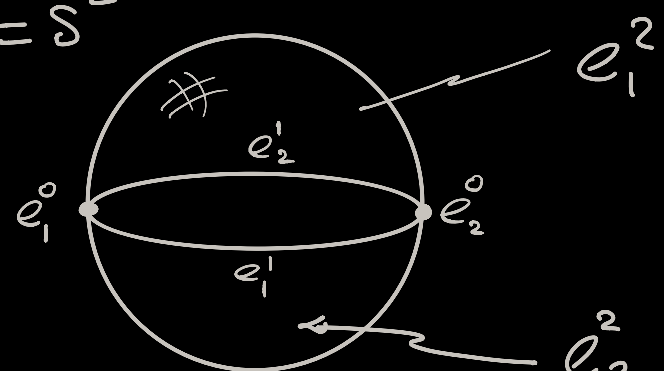
4.1 Definiciones y Propiedades Básicas.

Def: Una estructura celular en un espacio X es una colección de subespacios $\{e_\alpha\}_\alpha$ de X tales que:

1. Todo e_α es una celda ($e_\alpha \approx \mathring{D}^n$)
2. X es la unión disjunta de todos los e_α's.

Ejems:

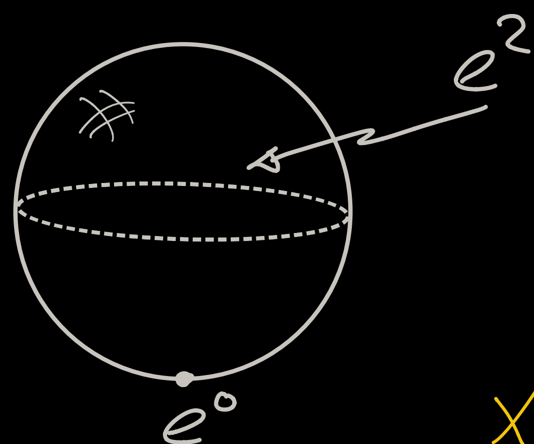
$X = S^2$



0-celdas: e_1^0, e_2^0
1-celdas: e_1^1, e_2^1
2-celdas: e_1^2, e_2^2

$$X = (e_1^0 \cup e_2^0) \cup (e_1^1 \cup e_2^1) \cup (e_1^2 \cup e_2^2)$$

$X = S^2$



0-celda: e^0

2-celda: e^2.

$$X = e^0 \cup e^2$$

El n-esqueleto de X es el subespacio:

$X^n =$ unión de todas las celdas de X, de dim. $\leq n$

y se tiene:

$$\emptyset = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq \dots \subseteq X$$

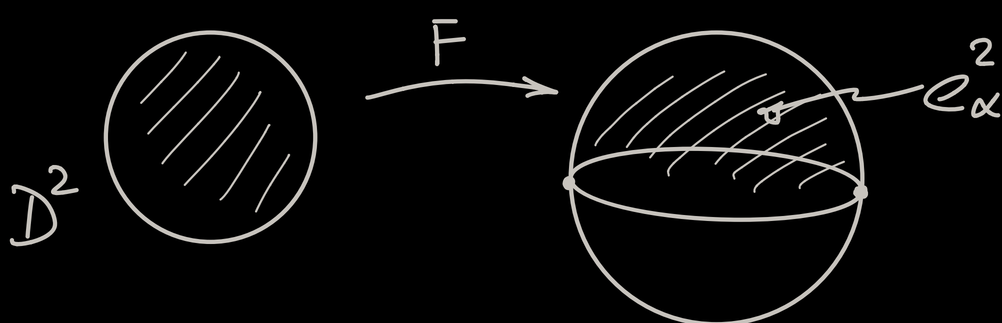
& $\displaystyle X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ (unión de todos los esqueletos de X)

Diremos que X tiene una descomposición celular.

Def: Sea $e^n_\alpha \subseteq X$ una n-celda. Un mapeo característico para e^n_α es una función continua $F : D^n \to X$ tal que:

- $F(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$

- $F|_{\mathring{D}^n} : \mathring{D}^n \xrightarrow{\approx} e^n_\alpha$



$F|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to X^{n-1}$ mapeo de pegado de e^n_α

Obs: Si X es Hausdorff, $\overline{e^n_\alpha} = F(D^n) \subseteq X^{n-1} \cup e^n_\alpha$

$$\partial e^n_\alpha = F(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}.$$

En particular:

- $\overline{e^n_\alpha}$ y ∂e^n_α son compactos.
- $F : D^n \longrightarrow \overline{e^n_\alpha}$ es una identificación.
- $F : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (\overline{e^n_\alpha}, \partial e^n_\alpha)$ homeomorfismo relativo.

Dem: Ver Tma. 4.1.2

Def: Un <u>CW-complejo</u> es un espacio Hausdorff X, con una estructura celular tal que toda celda posee un mapeo característico y:

(C) Para toda celda $e^n_\alpha \subseteq X$, $\overline{e^n_\alpha}$ intersecta (únicamente) a un núm. finito de celdas.

(W) Si $A \subseteq X$,
A es cerrado en $X \iff A \cap \overline{e^n_\alpha}$ cerrado en $\overline{e^n_\alpha}$ $\forall$ celda e^n_α de X.
($\Rightarrow$ es automático)

C = closure finite, W = weak topology.

Def: Si X es un CW-complejo, diremos

- $\dim X = n$ si $X = X^n$ y $X \neq X^{n-1}$.
- $\dim X = \infty$ si $X \neq X^n$ $\forall n$.
- X complejo finito: núm. finito de celdas.
- X complejo infinito: núm. ∞ de celdas.

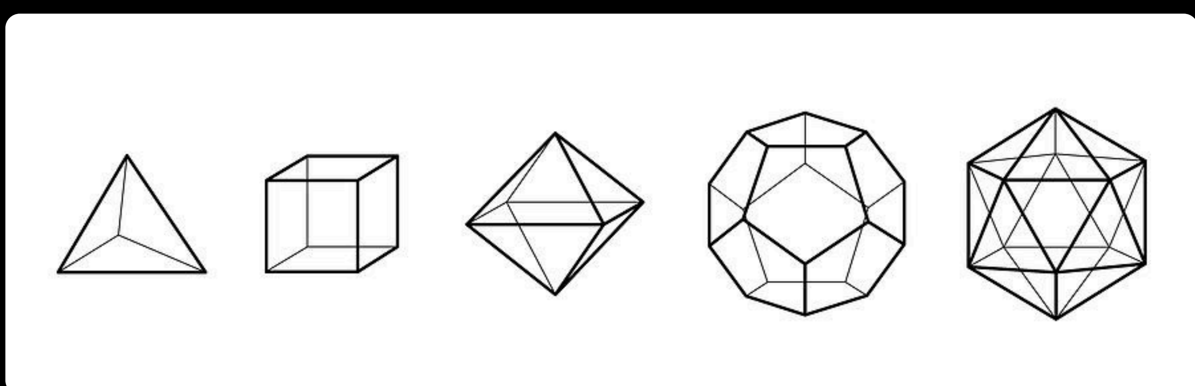
Ejems:

a) Si X tiene un núm. finito de celdas, (C) y (W) son automáticas, i.e.

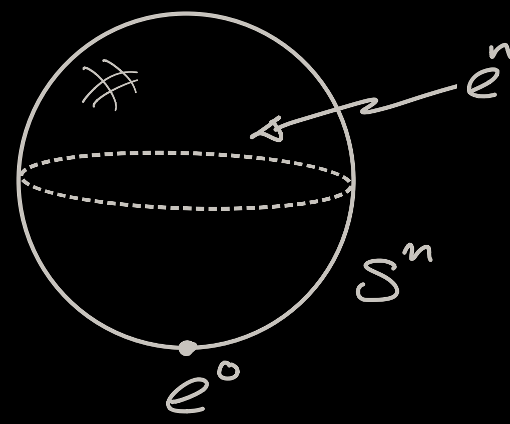
Todo espacio Hausdorff X c/descomp. celular finita en la que c/celda posee un mapeo característico es un CW-complejo.

b) Si K complejo simplicial, $|K|$ es un CW-complejo.

c) Las sigs. superficies son CW-complejos:



d). Si $e^0 \in S^n$ pto. arbitrario (0 - celda)



$e^n = S^n \setminus e^0$ es una n-celda

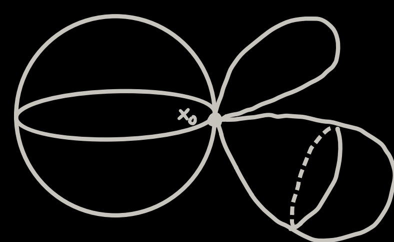
y $S^n = e^0 \cup e^n$.

$e^n \approx \mathring{D}^n$

$\overline{e^n} = S^n \not\approx D^n$

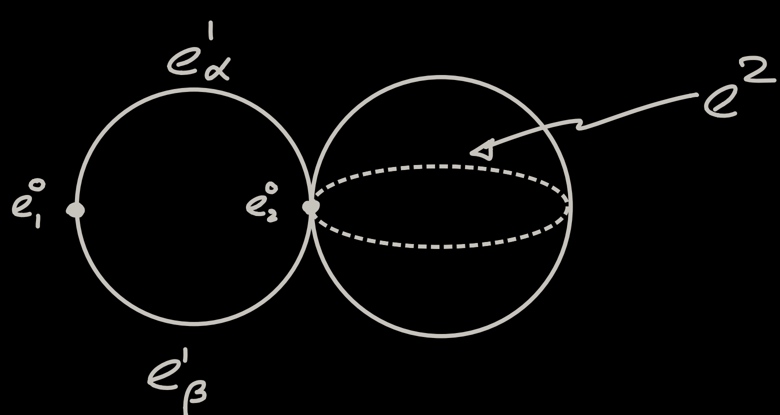
$\partial e^n \not\approx S^{n-1}$

e) El Wedge de esferas $S^{n_1} \vee \ldots \vee S^{n_k}$ es un CW-complejo.



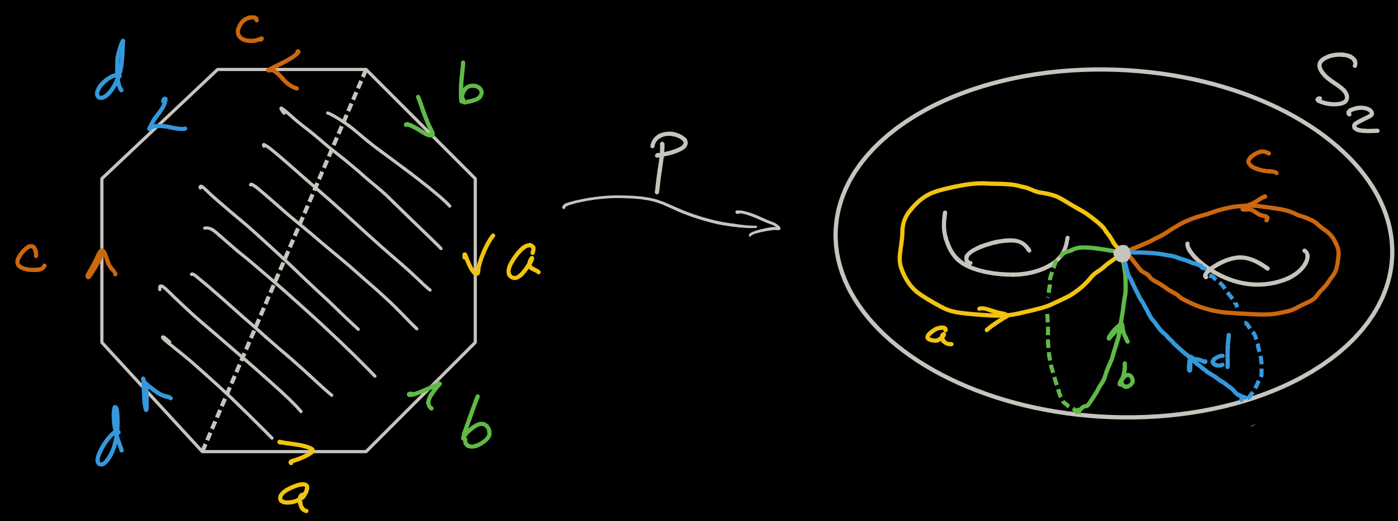
$$S^{n_1} \vee \ldots \vee S^{n_k} = e^0 \cup e^{n_1} \cup \ldots \cup e^{n_k}$$

f) $S^1 \vee S^2 = e^0_1 \cup e^0_2 \cup e^1_\alpha \cup e^1_\beta \cup e^2$



g). S_g = (sup. orientable, género g) es CW-complejo

Caso $g=2$:

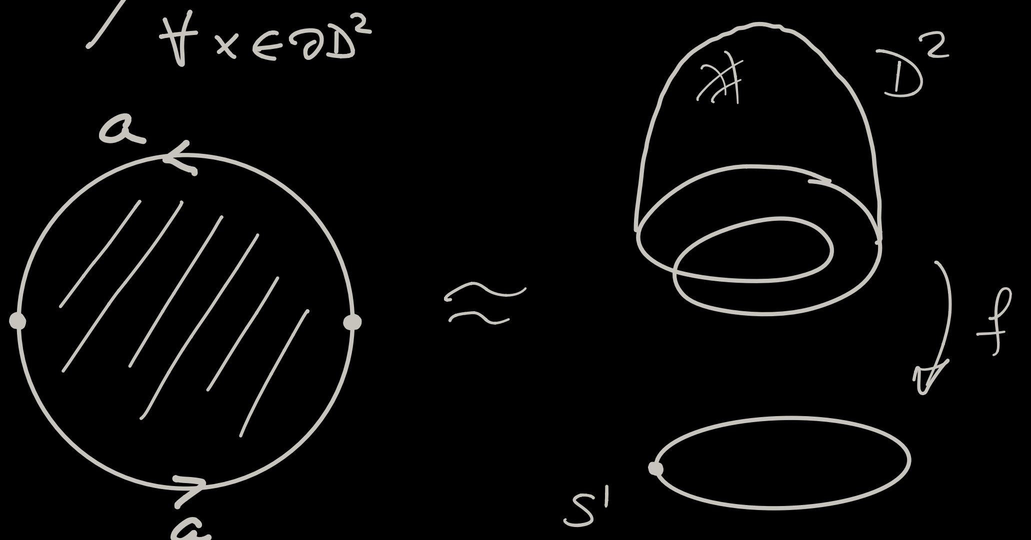


$$S_2 = e^0 \cup (e^1_a \cup e^1_b \cup e^1_c \cup e^1_d) \cup e^2$$

En general:

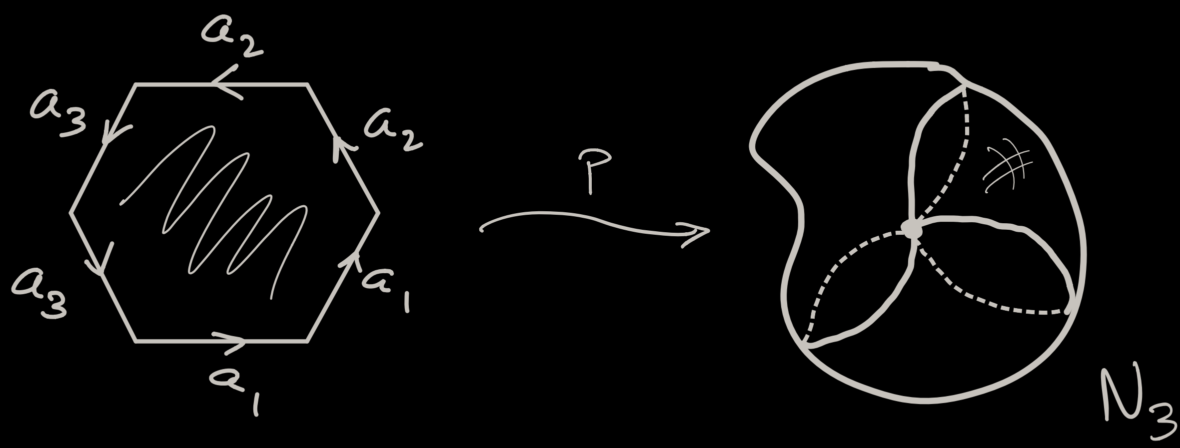
$$S_g = e^0 \cup (e^1_{a_1} \cup e^1_{b_1}) \cup \dots \cup (e^1_{a_g} \cup e^1_{b_g}) \cup e^2$$

h) $\mathbb{R}P^2 = D^2 \big/ \begin{smallmatrix} x \sim \pm x \\ \forall x \in \partial D^2 \end{smallmatrix} = e^0 \cup e^1 \cup e^2$



mapeo de grado 2

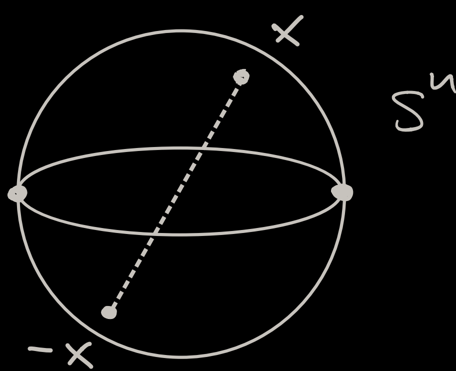
i). $N_g = (\text{Sup. no orientable, género } g) = \#_g \mathbb{RP}^2$. es un CW-complejo.



$$N_g = e^0 \cup (e^1_{a_1} \cup \dots \cup e^1_{a_g}) \cup e^2 .$$

j) Espacio proyectivo real de dim. n, $\mathbb{RP}^n$, es un CW-complejo.

$$\mathbb{RP}^n = S^n \Big/ \begin{matrix} x \sim \pm x \\ \forall\, x \in S^n \end{matrix}$$

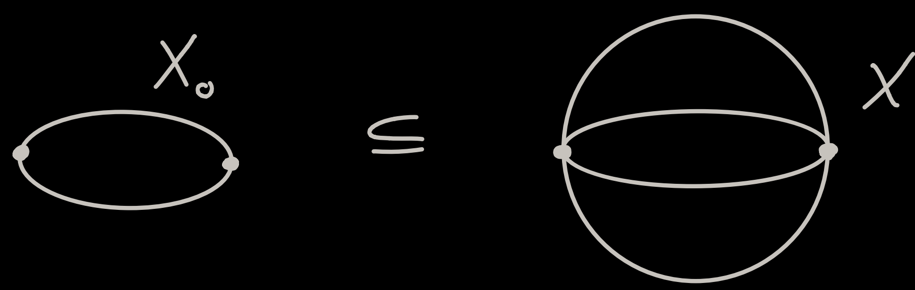


$$S^n = (e^0_1 \cup e^0_2) \cup (e^1_1 \cup e^1_2) \cup \dots \cup (e^n_1 \cup e^n_2)$$

$$\therefore \quad \mathbb{RP}^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n .$$

Def: Sea X un CW-complejo. Un subcomplejo $X_0 \subseteq X$ es un subespacio que es unión de celdas de X y

- X_0 es un CW-complejo con tal estructura.



De manera equivalente: (demostrar!)

- X_0 es cerrado en X.
- $\forall$ celda $e^n_\alpha \subseteq X_0$, $\overline{e^n_\alpha} \subseteq X_0$.

(cerradura de e^n_α en X)

Ejemplos:

- Unión ó intersección de subcomplejos es subcomplejo.
- El n-esqueleto X^n es un subcomplejo de X.
- De manera más general, si $\{e^n_\alpha\}$ son (algunas) n-celdas de X, entonces
$$X^{n-1} \cup \left(\bigcup e^n_\alpha\right) \text{ es un subcomplejo.}$$
- Toda componente arco-conexa de X es un subcomplejo de X.

Tma: Un subespacio $P \subseteq X$ que intersecta c/celda de X en a lo más un pto., tiene la topología discreta.

Dem: Todo subconjunto $Q \subseteq P$ intersecta a toda celda $e_\alpha \subseteq X$ en a lo más un pto.

(c) $\Rightarrow$ $Q \cap \overline{e_\alpha}$ es un núm. finito de ptos. y $\therefore$ es cerrado en $\overline{e_\alpha}$.

(W) $\Longrightarrow$ Q es cerrado en X.

Como todo $Q \subseteq P$ es cerrado en X, P es discreto.

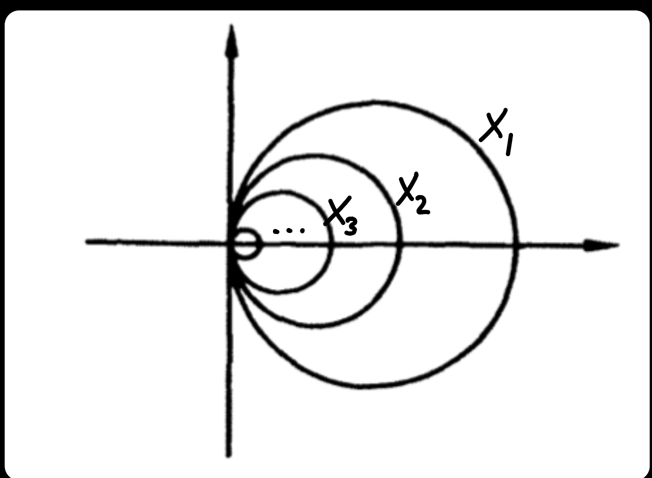
$\blacksquare$

Ejems:

1. Todo CW-complejo de dim. 0 es un espacio discreto.

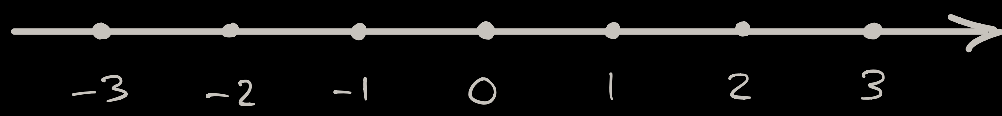
2. Para $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$
   Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, con:
   - Topología inducida por $\mathbb{R}^2$
   - Estructura celular obvia

   X no es CW-complejo.

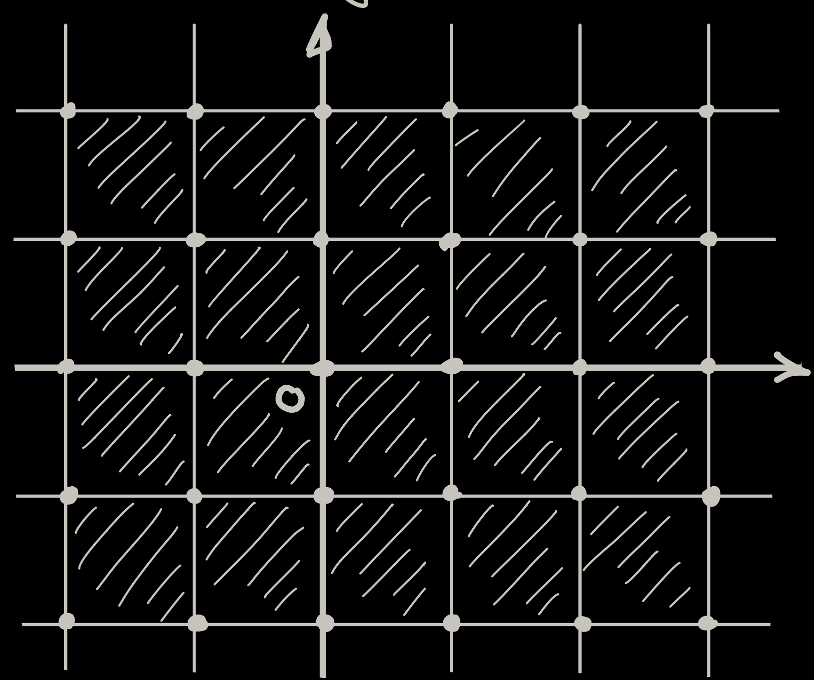


Tma. con $P = \{(0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$

3. $\mathbb{R}$ es un CW-complejo, $\mathbb{Z}$ el 0-esqueleto.



4. $\mathbb{R}^n$ es un CW-complejo ($\mathbb{Z}^n$ el 0-esqueleto).



Tma: Todo subconjunto compacto $A \subseteq X$ de un CW-complejo está contenido en un subcomplejo finito.

En particular:

X CW-complejo es compacto $\iff$ X tiene un núm. finito de celdas.

Dem: Ver Tma. 4.1.9.

Cor: Un CW-complejo X es localmente compacto $\Longleftrightarrow$ X es localmente finito

(i.e. todo pto. $x \in X$ tiene una vecindad U que intersecta a un núm. finito de celdas)

Tma: Sea $f: X \to Y$ una función

(resp. $f_t: X \to Y$ una familia de funciones)

de un CW-complejo X, en un espacio Y.

Las sigs. son equivalentes:

a). f es continua (resp. f_t es una homotopía).

b). $\forall$ celda $e_\alpha \subseteq X$, $f|_{\overline{e_\alpha}}$ es continua.

(resp. $f_t|_{\overline{e_\alpha}}$ es una homotopía).

c) $\forall\, n \geq 0$, $f|_{X^n}$ es continua

(resp. $f_t|_{X^n}$ es una homotopía).