Cap 1. Espacios, Mapeos y Problemas Topológicos

1.1. Homeomorfismos

$\mathbb{R}^n$ = espacio vectorial
c/ Norma: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
Métrica Euclidiana: $d(x,y) = \|x-y\|$

$\Longrightarrow$ Topología Usual en $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^0 = \{0\}$, $\quad \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $\qquad \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$\qquad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$(x,y) \longleftrightarrow x + iy$

Def: Para $n \geq 0$

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ disco unitario de dim. n

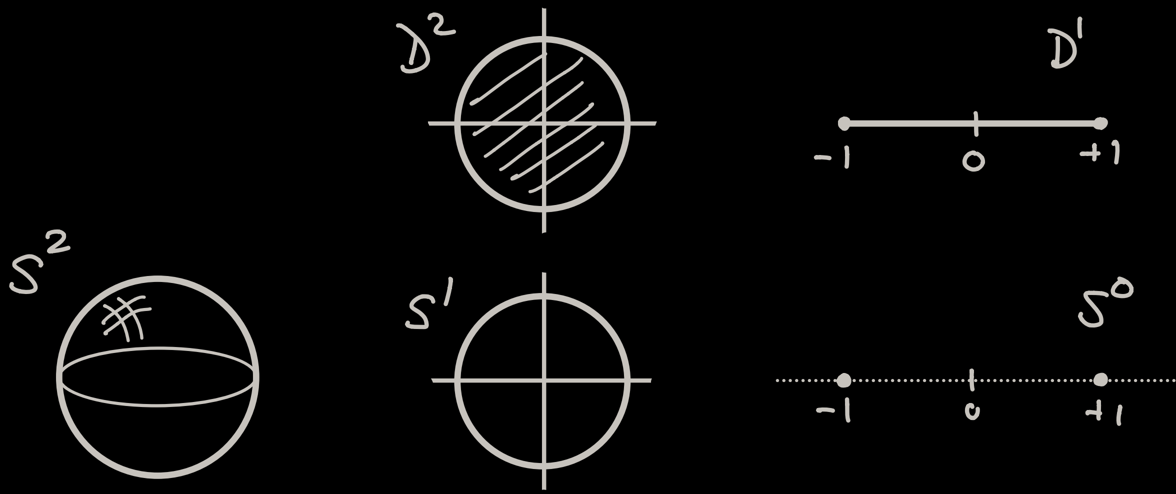
$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ esfera unitaria de dim. $n-1$

$\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ celda (abierta) de dim n

$I = [0,1]$ intervalo unitario

$I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$ cubo unitario de dim. n

$\partial I^n = \{x \in I^n \mid x_i = 0,1 \text{ para algún } i\}$ frontera de I^n en $\mathbb{R}^n$



Obs: D^n y S^n compactos, arco-conexos (salvo S^0).

Problema: Dados X, Y decidir si X y Y son homeomorfos

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y \qquad\qquad X \approx Y$$

Ejem: Transformación afín $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ $\quad$ A matriz $n \times n$ invertible

$\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

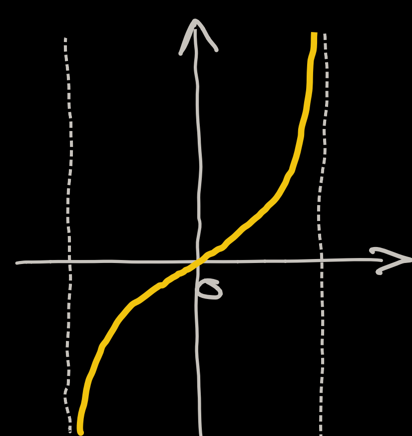
- f es homeomorfismo
- $X \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow X \approx f(X)$

- Rotaciones
- Reflexiones
- Homotecias
- Traslaciones

etc.

Ejem: $f: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$

es un homeomorfismo.



$\Rightarrow$ Todo intervalo en $\mathbb{R}$ es homeomorfo a I, $[0, +\infty)$ ó $\mathbb{R}$

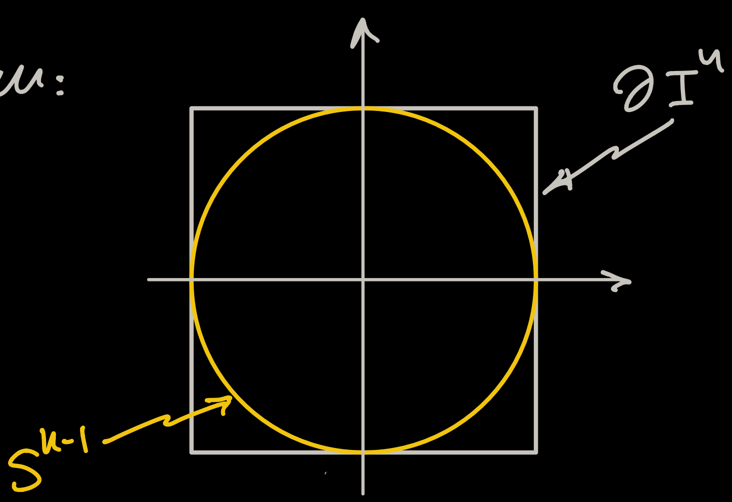
Ejem: $f : \mathring{D}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\qquad f(x) = \dfrac{x}{1 - \|x\|}$

Inversa: $\qquad f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1 + \|y\|}$.

Obs: $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a una n-celda.

$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \implies$ producto $(m\text{-celda}) \times (n\text{-celda})$ es una $(m+n)$-celda.

Ejem:



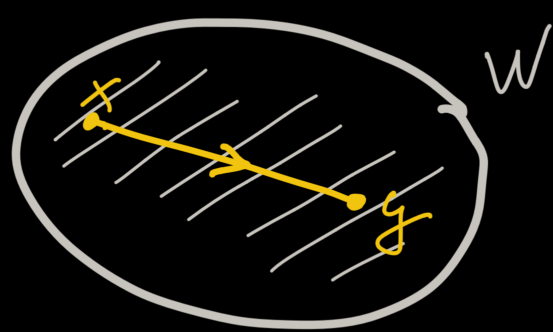
$f : \partial I^n \xrightarrow{\ \cong\ } S^{n-1}$

$x \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|}$

Def: a) Un subconjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall\, x, y \in W$

$(1-t)x + ty \in W$

$\forall\, t \in [0,1]$.



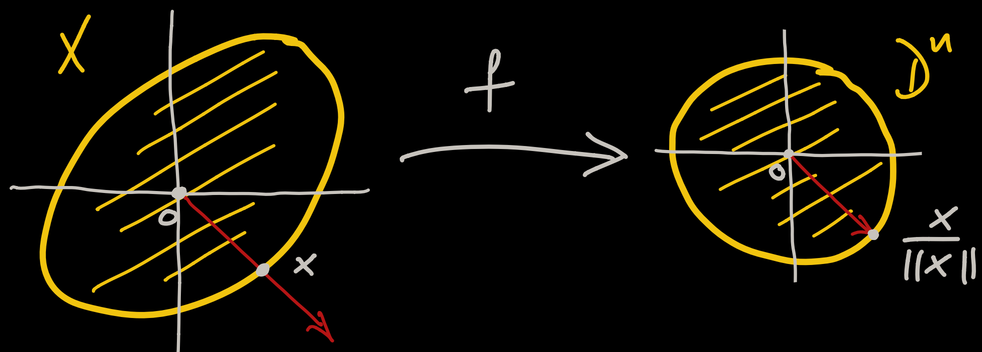
b). • Pareja de Espacios (X, A): X espacio, $A \subseteq X$ subespacio

• Mapeo de parejas $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es un mapeo $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.

• Si $f : X \xrightarrow{\approx} Y$ y $f(A) = B$, f es homeo. de parejas.
$(X, A) \approx (Y, B)$

Tma: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, convexo, $\mathring{X} \neq \emptyset$. Entonces $\exists$ homeo. de parejas: $f : (X, \partial X) \xrightarrow{\approx} (D^n, S^{n-1})$.

∂X = frontera de X



Dem: Podemos suponer $0 \in \mathring{X}$.
El mapeo
$$\partial X \longrightarrow S^{n-1}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$
es homeomorfismo

y extendemos a un homeomorfismo
$$f : X \longrightarrow D^n$$
poniendo:
$$tx \longmapsto t\frac{x}{\|x\|}$$
$$0 \longmapsto 0$$
∎

Ejem: El cubo $I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y convexo con interior $\neq \emptyset$. Entonces
$$(I^n, \partial I^n) \approx (D^n, S^{n-1})$$

Ejem: $D^p \times D^q \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ compacto, convexo con interior $\neq \emptyset$

$$\partial(D^p \times D^q) = D^p \times S^{q-1} \cup S^{p-1} \times D^q.$$

$$\Rightarrow (D^p \times D^q, D^p \times S^{q-1} \cup S^{p-1} \times D^q) \approx (I^{p+q}, \partial I^{p+q}).$$

Homeo. explícito: Ejem 1.1.10

Obs: $D^m \times D^n \approx D^{m+n}$.

Ejem: Consideremos la esfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$D^n_+ = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$ hemisferio norte

$D^n_- = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}$ " sur

$\Rightarrow D^n_+ \cup D^n_- = S^n$ y $D^n_+ \cap D^n_- = S^{n-1}$

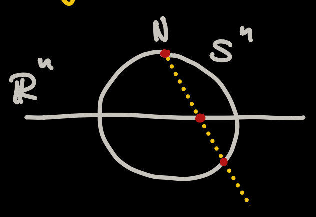
Homeomorfismo: $P_\pm : D^n \xrightarrow{\approx} D^n_\pm$

$$P_\pm(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1, \ldots, x_n, \pm\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\right)$$

$p: S^n \setminus N \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$ $\quad N = (0,0,\ldots,0,1) \in S^n$

$$p(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$ proy. estereográfica

$$p^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{|y|^2+1}, \ldots, \frac{2y_n}{|y|^2+1}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)$$



Obs: S^n y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos.

- $n=0$ $\quad S^0=\{\pm 1\} \not\approx \mathbb{R}^0=\{0\}$.
- $n\geq 1$ $\quad S^n$ es compacto y $\mathbb{R}^n$ no lo es.

Preguntas:
- $D^n \approx S^n$?
- $S^m \times S^n \approx S^{m+n}$?
- $\mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^n$?
- $D^m \approx D^n$?
- $S^m \approx S^n$?

Tma (Invarianza del dominio):
Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacios homeomorfos de $\mathbb{R}^n$.
Si X es abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces Y es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Dem: Se usa homología. $\blacksquare$

Tma (Invarianza de la dimensión):
Si $m\neq n$ entonces $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$, $S^m \not\approx S^n$ y $D^m \not\approx D^n$.
Dem:
- Si $m<n$, $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ no es abierto en $\mathbb{R}^n$, pero
  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ si es abierto en $\mathbb{R}^n$.

  $\therefore \mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$.

- Si $S^m \approx S^n$, entonces $\mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^n$ (proy. estereográfica)

  $\therefore m=n$.

• Sean $m<n$ y $f: D^m \xrightarrow{\approx} D^n$ homeo.

Entonces $\mathring{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a

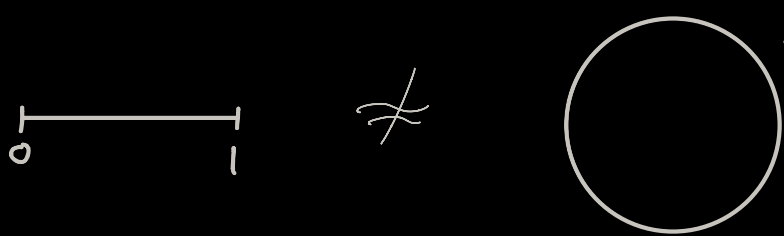
$$f^{-1}(\mathring{D}^n) \subseteq D^m \subseteq \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$$

pero $f^{-1}(\mathring{D}^n)$ no es abierto en $\mathbb{R}^n$. $\#_c$ ▨

Tma (Invarianza de la frontera):
Todo homeomorfismo $f: D^n \longrightarrow D^n$ manda a S^{n-1} en S^{n-1}.

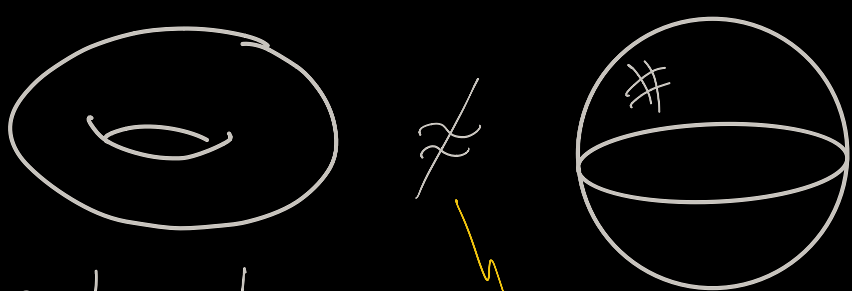
Dem: Tma. 1.1.18, pág. 7. ▨

Ejem: $I = [0,1]$ no es homeomorfo a $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$



S^1

Ejem:



S^2

Sup. de un toro en $\mathbb{R}^3$

Tma de la curva de Jordan.

Toro (superficie) en $\mathbb{R}^3$ $\approx$ $S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$.

1.2 Topología Cociente

Def: Sea X espacio con una R.E. R

Para $x \in X$: $\quad \langle x \rangle = \{ y \in X \mid y \sim x \}$ clase de equivalencia

$X/_R = \{ \langle x \rangle \mid x \in X \}$ conjunto cociente

conj. de clases de equivalencia

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow X/_R \\ x &\longmapsto \langle x \rangle \end{aligned}$$ proy. canónica

Topología cociente en $X/_R$: $B \subseteq X/_R$ es abierto $\Longleftrightarrow$ $p^{-1}(B) \subseteq X$ es abierto.

Tma: Con respecto a esta topología

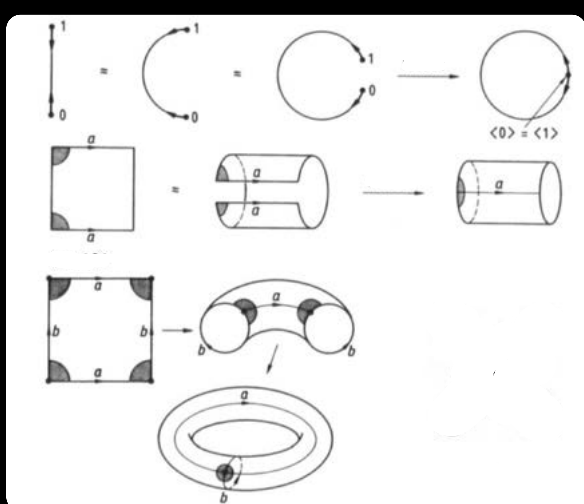
① $p : X \to X/_R$ es continua y suprayectiva.

Si $A \subseteq X$, ponemos $A^* = p^{-1}p(A) \subseteq X$
$= \{ x \in X \mid x \sim a \text{ para algún } a \in A \}$

② p es abierta $\Longleftrightarrow$ $\forall$ abierto $A \subseteq X$, $A^* \subseteq X$ es abierto.

③ p es cerrada $\Longleftrightarrow$ $\forall$ cerrado $A \subseteq X$, $A^* \subseteq X$ es cerrado.

Ejems:



Tma: Sean R una R.E. en X
S una R.E. en Y
y $f: X \to Y$ mapeo compatible con dichas rels.
i.e. $x \sim_R x' \Rightarrow f(x) \sim_S f(x')$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\text{proy}"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & Y \arrow[d, "\text{proy}"] \\ X/R \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & Y/S \end{tikzcd}$$

diagrama conmutativo

$$\langle x \rangle_R \longmapsto \langle f(x) \rangle_S$$

Entonces la función $\bar{f}: X/R \to Y/S$, $\bar{f}(\langle x \rangle_R) = \langle f(x) \rangle_S$
está bien definida y es continua.

Cor: Sea X espacio topológico con una R.E. R y
$f: X \to Y$ un mapeo compatible con R (i.e. constante en clases de equiv.) $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$.

Entonces $\bar{f}: X/R \longrightarrow Y$
$$\langle x \rangle \longmapsto f(x)$$
está bien definida y es continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & Y \\ X/R \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Tma: Si $A \subseteq X$ y $A^* = p^{-1}p(A)$ es abierto ó cerrado entonces la top. de subespacio de $p(A) \subseteq X/R$ coincide con la topología cociente en A^*/R.

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, hook] \arrow[d, "p|_{A^*}"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & X \arrow[d, "p"] \\ A^*/R \arrow[r, hook] & X/R \end{tikzcd}$$

$$A^*/R = p(A) \subseteq X/R$$

Top. cociente   Top. subespacio

Def: Sea $f: X \to Y$ continua, sobre. Definimos una R.E. en X $R(f)$: $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$.

f es una identificación si cumple alguna de las sig. condiciones equivalentes

a). $\bar{f} : X/R(f) \to Y$ es homeomorfismo.

b) $A \subseteq Y$ es abierto (cerrado) $\iff f^{-1}(A) \subseteq X$ lo es.

c) Para toda función $g: Y \to Z$ en un espacio Z cualquiera, g es continua $\iff g \circ f : X \to Z$ lo es.

En tal caso, la topología de Y está determinada por f y la topología de X.

Tma:

a). Todo mapeo sobre y abierto (cerrado) es una identificación.
Todo mapeo sobre, de un espacio compacto en un Hausdorff es cerrado y $\therefore$ una identificación.

b). Sea $f: X \to Y$ una identificación y $g: Y \to Z$ continua y sobre. Entonces:
$g \circ f$ es una identificación $\iff$ g lo es

Tma: Sea $f: X \to Y$ una identificación, $B \subseteq Y$ abierto ó cerrado y $A = f^{-1}(B) \subseteq X$. Entonces
$f|_A : A \to B$ es una identificación.

Tma: Si $f: X \to X'$ es identificación y Y localmente compacto, entonces
$$f \times id_Y : X \times Y \longrightarrow X' \times Y$$
es una identificación.

Cor: El mapeo natural $(X \times Y)/(R \times S) \longrightarrow X/R \times Y/S$

es un homeomorfismo si X y Y/S son localmente compactos.