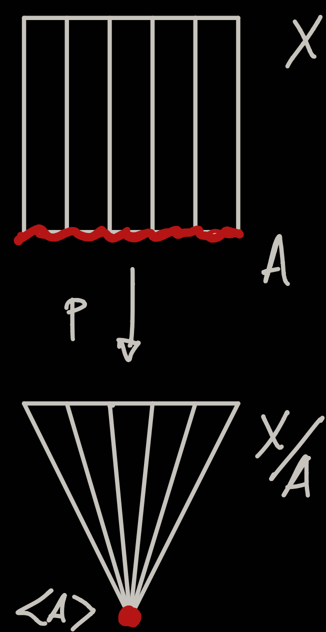
1.3. Ejemplos de cocientes

El cociente X/A: Sea $A \subseteq X$ cerrado y R la R.E. que identifica a todos los ptos. de A entre sí.



- Clases de equivalencia: A, $\{x\}$ $x \notin A$
- Espacio cociente: X/A
- $p: X \longrightarrow X/A$ continua
  $x \longmapsto \langle x \rangle$

X/A es el cociente de X al colapsar A a un punto.

Tma: a). Todo mapeo de pares $f:(X,A) \to (Y,B)$ induce un mapeo $\bar{f}: X/A \to Y/B$.

b). f homeomorfismo de pares $\Rightarrow \bar{f}$ homeo.

Def: $f:(X,A) \to (Y,B)$ se dice homeomorfismo relativo si $f|_{X \setminus A} : X \setminus A \xrightarrow{\approx} Y \setminus B$.

Tma: La proyección $p:(X,A) \longrightarrow (X/A, \langle A \rangle)$ es un homeomorfismo relativo.

Ejems: 1. $X/\{x_0\} = X$

2. $I/\partial I \approx S^1$

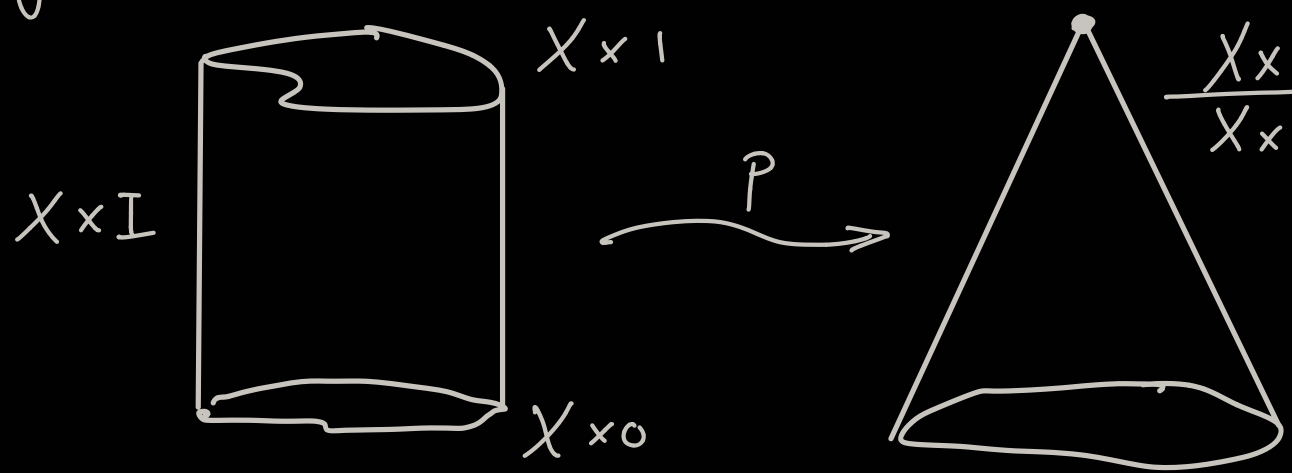
3. $D^n/S^{n-1} \approx S^n$ (Ejem 1.3.5)

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "f", "\text{sobre}"'] \arrow[d, "p"'] & S^n \\ D^n/S^{n-1} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}\ \text{homeo}"'] & \end{tikzcd}$$

4. Si X compacto, X/A es la compactificación unipuntual de $X \setminus A$.

5. $S^n \approx D^n/S^{n-1}$ es la compactificación unipuntual de $\mathring{D}^n \approx \mathbb{R}^n$.

Ejem: X espacio



$$\frac{X\times I}{X\times 1} = CX$$

cilindro sobre X cono sobre X

Ejem: El cono sobre S^n es homeomorfo a D^{n+1}!

$$\begin{tikzcd} S^n \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & D^n \\ \dfrac{S^n \times I}{S^n \times 1} \arrow[ur, "\approx", "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$f(x,t) = (1-t)\,x\,.$

Ejem: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios topológicos

$$\coprod_{j=1}^{n} X_j := (X_1 \times \{1\}) \cup (X_2 \times \{2\}) \cup \ldots \cup (X_n \times \{n\})$$

unión disjunta

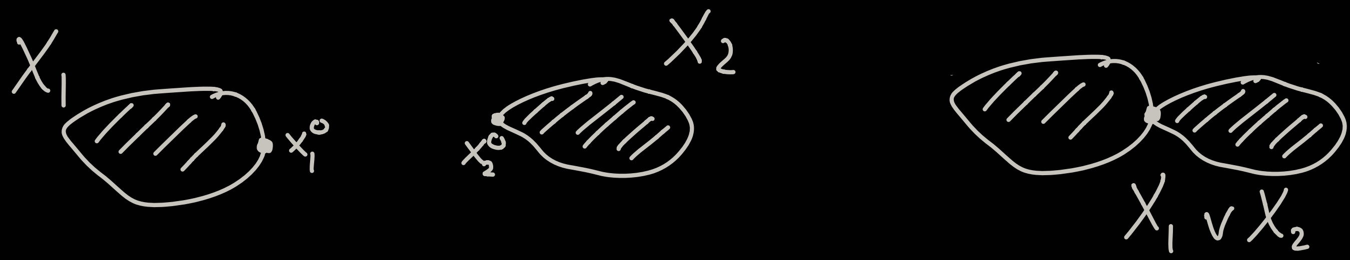
c/ la top. gen. por la de los X_j's.

Elegimos un pto. $x_j^0 \in X_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$

Sea $A = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\} \subseteq \coprod_{j=1}^{n} X_j$

$$\bigvee_{j=1}^{n} X_j := \coprod_{j=1}^{n} X_j \Big/ A$$

unión en un punto (ó el "wedge") de $X_1, \ldots, X_n$.



Propiedades:

- Proy. canónica: $p: \coprod_j X_j \longrightarrow \bigvee_j X_j$ es cerrada.
- $p|_{X_j} : X_j \longrightarrow \bigvee_j X_j$ es un encaje $\forall j$.
- Una colección de mapeos $f_j : X_j \longrightarrow X_j'$ tales que $f(x_j^\circ) = x_j'^\circ$ $\forall j$, induce un mapeo:

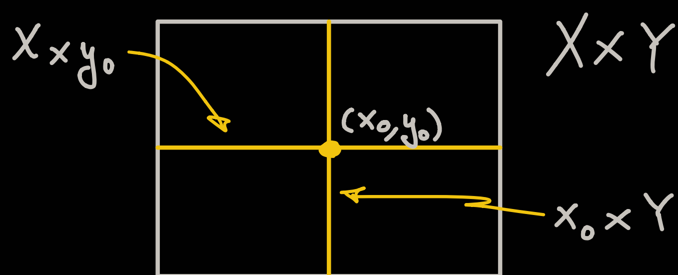
$$\begin{aligned} f_1 \vee \dots \vee f_n : X_1 \vee \dots \vee X_n &\longrightarrow X_1' \vee \dots \vee X_n' \\ \langle x_j \rangle &\longmapsto \langle f_j(x_j) \rangle \end{aligned}$$

- Una colección de mapeos $g_j : X_j \longrightarrow Y$ tales que $g_j(x_j^\circ) = y_\circ$ $\forall j$, induce un mapeo:

$$\begin{aligned} (g_1, \dots, g_n) : X_1 \vee \dots \vee X_n &\longrightarrow Y \\ \langle x_j \rangle &\longmapsto g_j(x_j) \end{aligned}$$

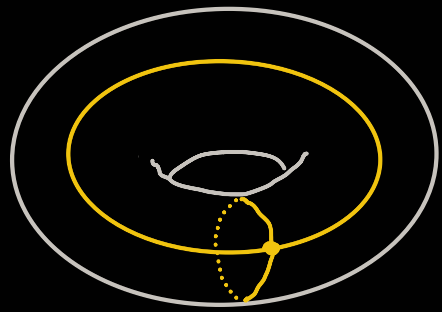
Otra descripción de $X \vee Y$: (X, x_0), (Y, y_0) espacios con punto base

Unión de los "ejes coordenados" en $X \times Y$



$$X \vee Y \approx (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)$$

Ejem:



$$\begin{array}{c} S^1\times S^1 \\ \cup\!| \\ S^1\vee S^1 \end{array}$$

Espacio de adjunción $Y\cup_f X$

$A\subseteq X$ cerrado, $f: A\to Y$ mapeo.

Def: $$Y\cup_f X := Y\amalg X \Big/ \begin{array}{l} f(a)\sim a \\ \forall a\in A \end{array}$$

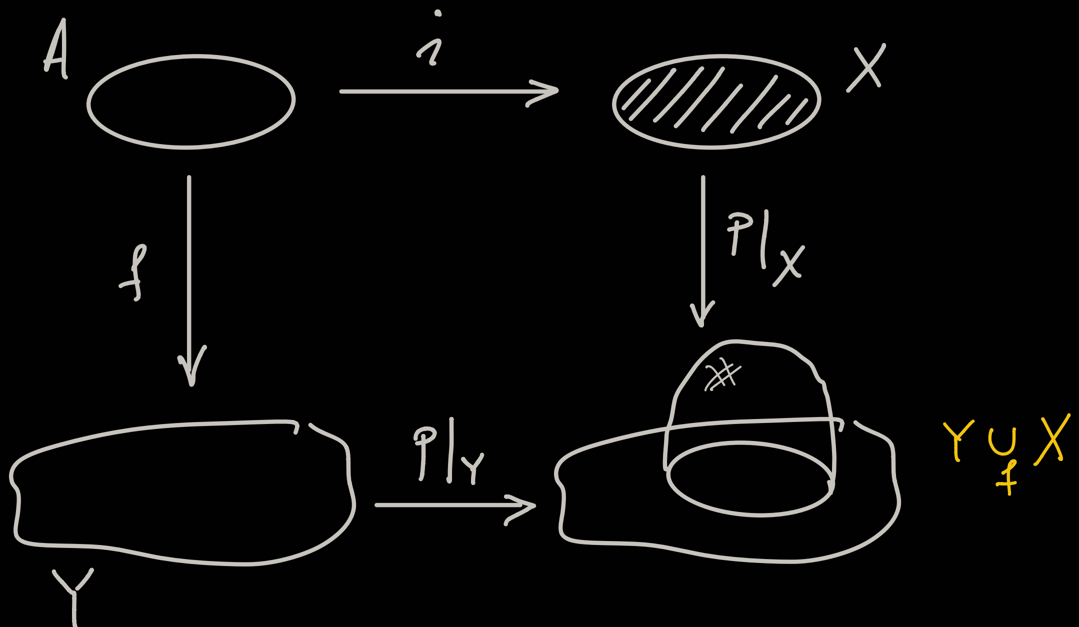


Diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & X \arrow[d, "p_X"] \arrow[d, phantom, "\text{continua}", xshift=40pt] \\ Y \arrow[r, "p_Y", "\text{encaje cerrado}"'] & Y\cup_f X \end{tikzcd}$$

Obs: $p|_X : X \longrightarrow Y \cup_f X$ mapea $X \setminus A$ de manera homeomorfa sobre $(Y \cup_f X) \setminus Y$

$\therefore \quad p|_X : (X, A) \longrightarrow (Y \cup_f X, Y)$ homeomorfismo relativo

Tma: Sean $A \subseteq X$ cerrado, $f : A \longrightarrow Y$ mapeo y $\varphi : X \longrightarrow Z$, $\psi : Y \longrightarrow Z$ t.q. $\varphi|_A = \psi \circ f$

(push-out)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "p_X"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\
Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & Y \cup_f X \arrow[dr, dashed, "\exists F"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

$\therefore \exists$ mapeo $F : Y \cup_f X \longrightarrow Z$ que coincide con φ en X y con ψ en Y.

Ejems: ① $Y = \{y_0\}$

$Y \cup_f X = X/A$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d] \\
\{y_0\} \arrow[r] & X/A
\end{tikzcd}$$

② $A = \{x_0\}$

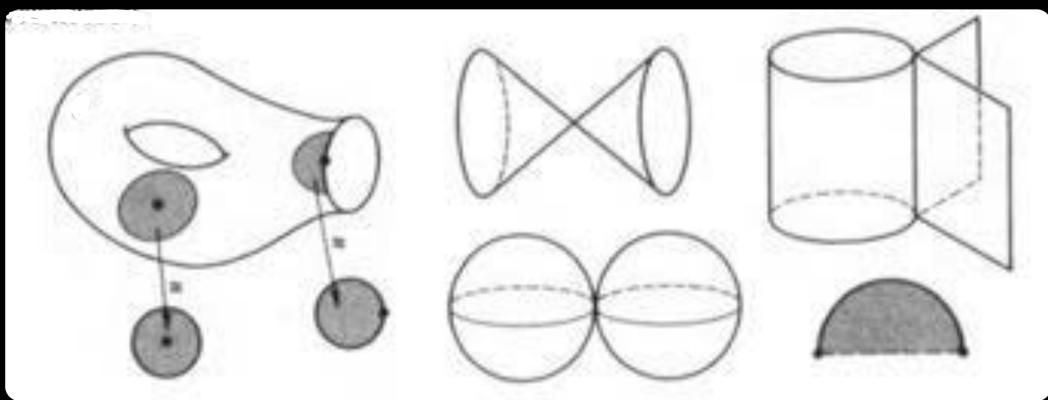
$Y \cup_f X = X \vee Y$

$$\begin{tikzcd}
\{x_0\} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "i"] \\
Y \arrow[r, "j"] & X \vee Y
\end{tikzcd}$$

1.4. Superficies

Def: Un espacio top. S es una superficie si:

- Todo pto. de S tiene una vec. homeomorfa a D^2.
- S es Hausdorff
- S tiene una base numerable para su topología.



punto interior

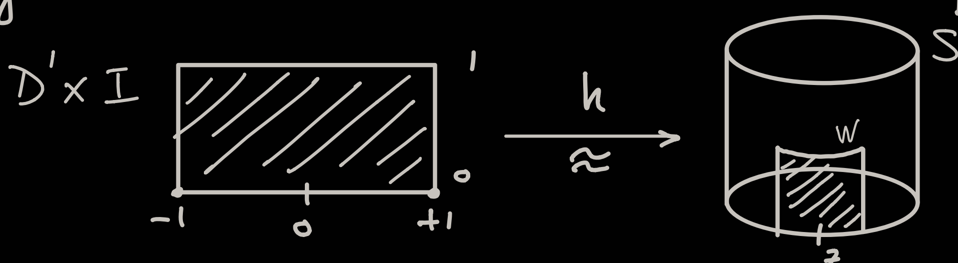
punto frontera

No son superficies

- ∂S = ptos. frontera
- $\partial S = \emptyset$, S es una superficie sin frontera.
- S se dice cerrada si S es compacta y sin frontera.

Tma: Todo homeo. $f: S \to S'$ manda ∂S en $\partial S'$.

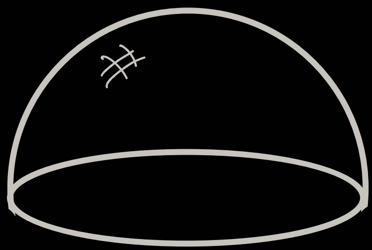
Tma: Para todo pto. frontera $z \in S$ $\exists$ vec. $z \in W \subseteq S$ y un homeo. $h: D^1 \times I \longrightarrow W$ tal que:



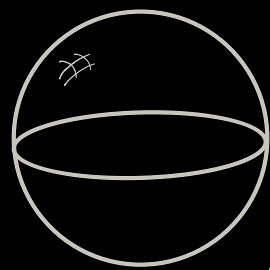
$h(0,0) = z$

$h(D^1 \times 0) = W \cap \partial S$

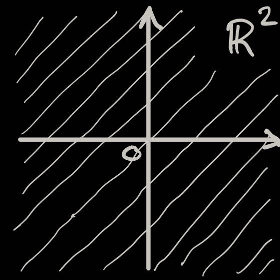
Ejems:



superficie c/frontera



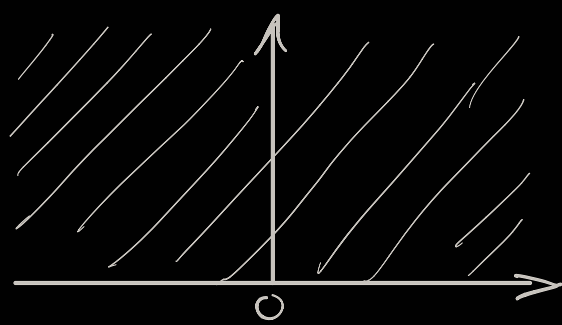
sup. cerrada (compacta y sin frontera)



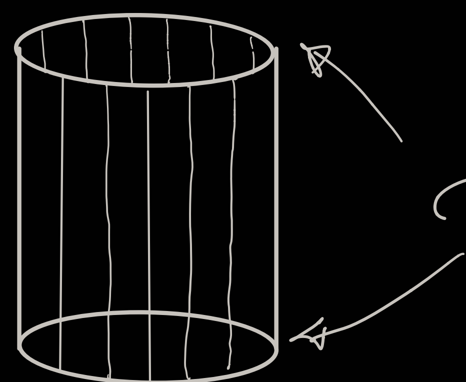
No compacta
No cerrada

Ejems:

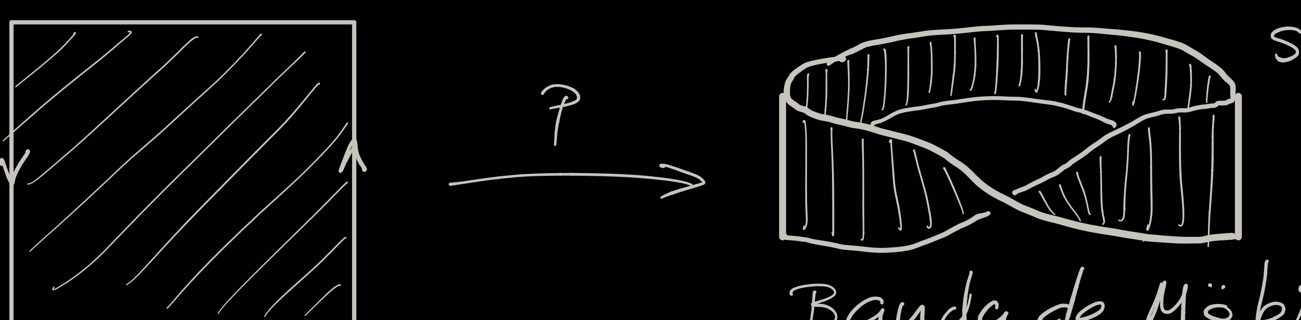
$\partial D^2 = S^1$



$S = S^1 \times [0,1]$



∂S

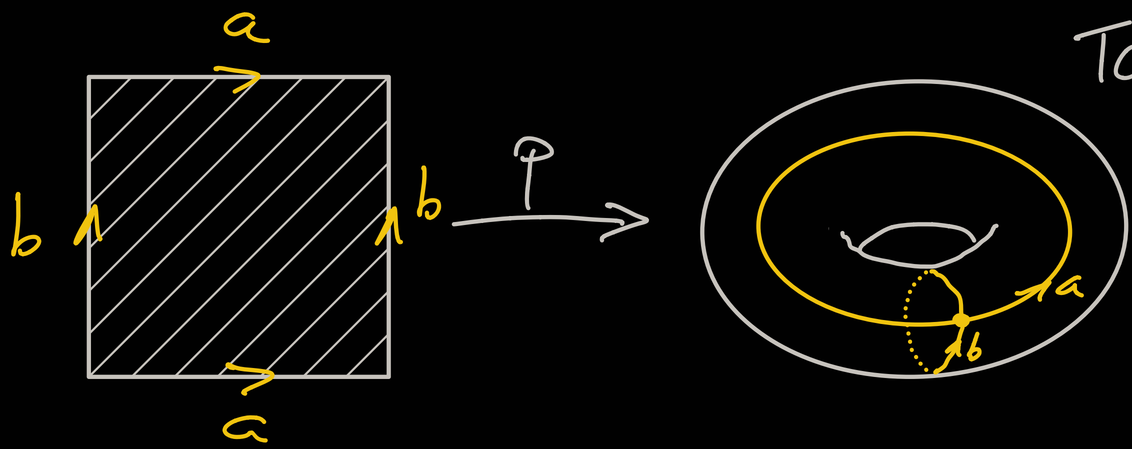


Banda de Möbius
$\partial S \approx S^1$.

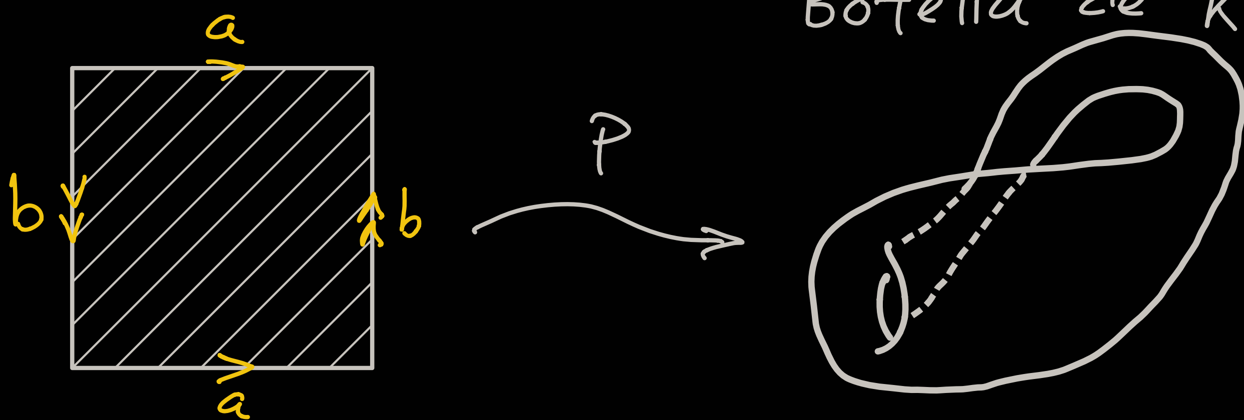
Parametrización Ver 1.4.6

Ejems:

Toro



Botella de Klein

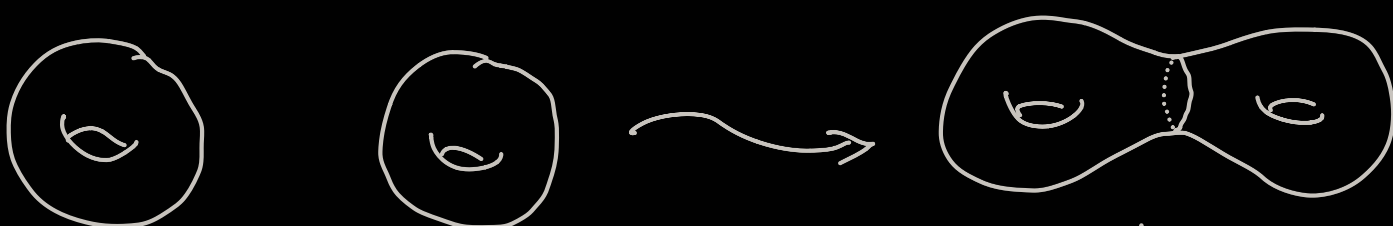


U|

Banda de Möbius

Operaciones con superficies.

1. Suma conexa:

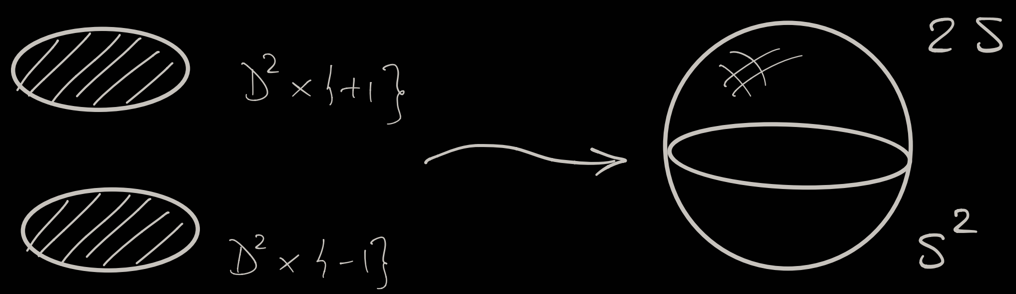


S_1 $\quad$ S_2 $\quad$ $S_1 \# S_2$

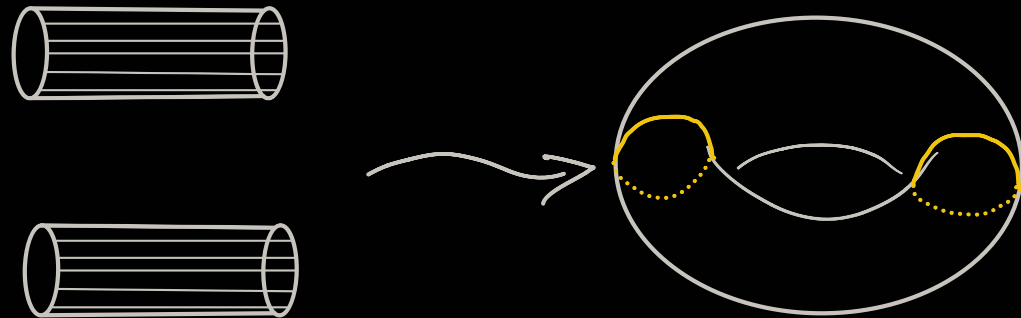
2. Duplicación: S superficie c/frontera.

$$2S = S \times \{\pm 1\} \Big/ \begin{array}{l}(x,+1) \sim (x,-1) \\ \forall\, x \in \partial S\end{array}$$

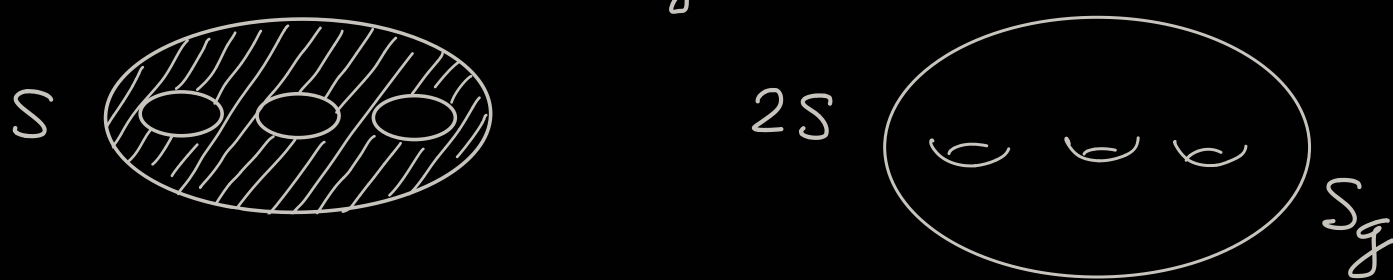
$S = D^2$



$S = S^1 \times [0,1]$



Ejem: S = disco menos g discos abiertos

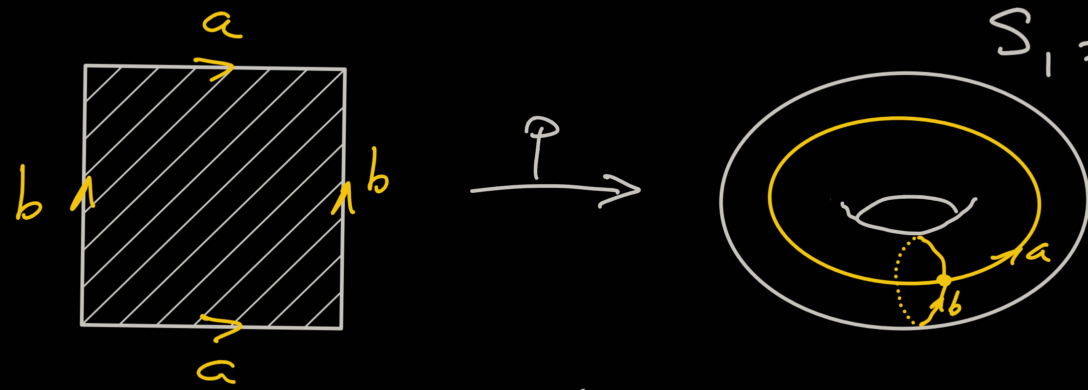


Sup. orientable de género g

$$S_g = \underbrace{T \# \cdots \# T}_{g} \quad \text{suma conexa } g \text{ toros}$$

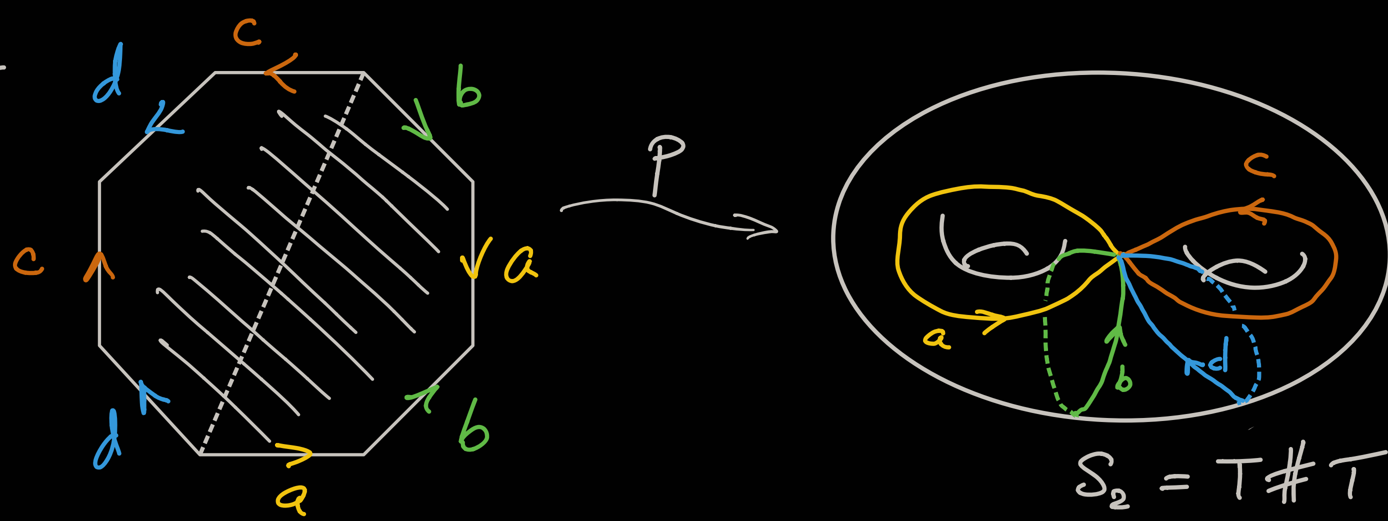
$g=1$:

$S_1 = \text{Toro}$



Frontera: $aba^{-1}b^{-1}$

$g=2$



$S_2 = T \# T$

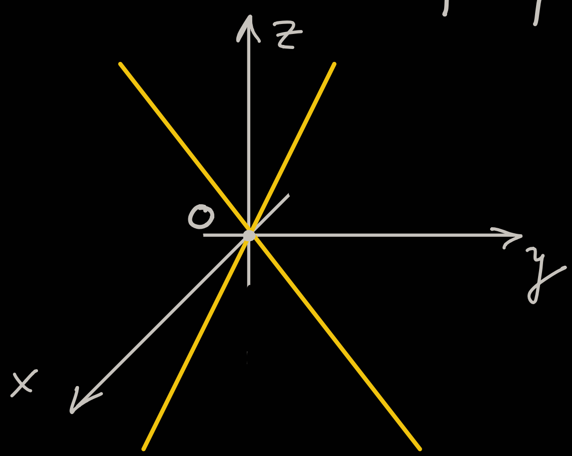
Frontera: $aba^{-1}b^{-1} \cdot cdc^{-1}d^{-1}$

$= [a,b] \cdot [c,d]$.

S_g es el cociente de un $4g$-ágono cuyas aristas están identificadas por el producto de conmutadores:

$$\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) \dots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1})$$

Ejem: El plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ es el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por O.

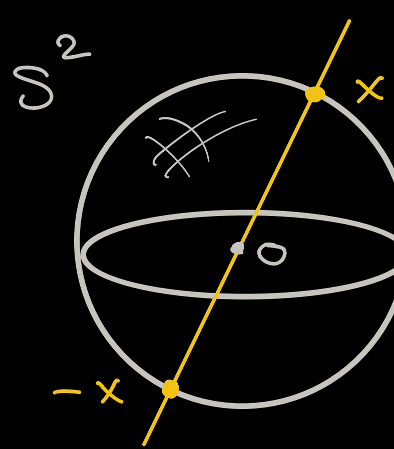


Topología: En $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definimos la R.E.

$$x \sim y \iff x = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R} \ (\lambda \neq 0)$$

Def: $\mathbb{RP}^2$ es el espacio cociente:

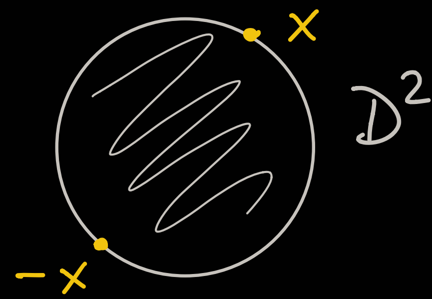
$$\mathbb{RP}^2 := \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right) / \sim$$



Tma: $\mathbb{RP}^2 \approx S^2 / x \sim \pm x \ \forall x$

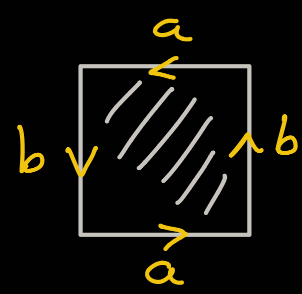
Dem:
$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \arrow[d] \\
S^2/\sim \arrow[r, dashed, "\approx"] & \mathbb{RP}^2
\end{tikzcd}$$

Tma: $\mathbb{RP}^2 \approx D^2 \big/ {\substack{x \sim \pm x \\ \forall x \in \partial D^2}}$



- $\mathbb{RP}^2$ es el cociente

ó



- $\mathbb{RP}^2$ es la unión de una banda de Möbius y un disco, pegados por su frontera.

Ejem: $N_g = \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2}_{\longleftarrow\, g \,\longrightarrow}$ superficie no orientable género g

$g=1 \qquad N_1 = \mathbb{RP}^2$

$g=2 \qquad N_2 = K$ botella de Klein

- N_g es el cociente de un $2g$-ágono cuyas aristas están identificadas por el producto: $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_g^2$.